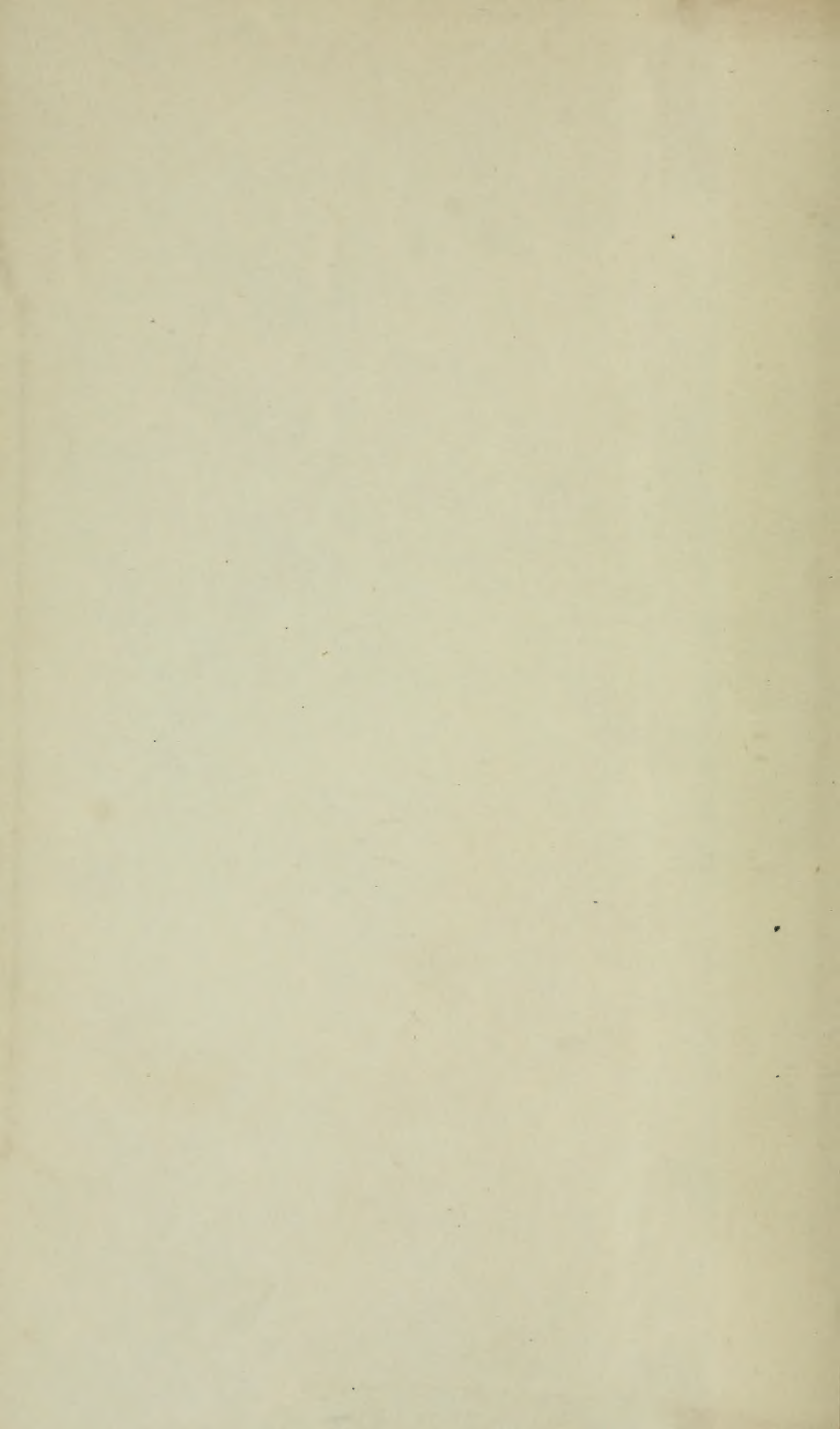
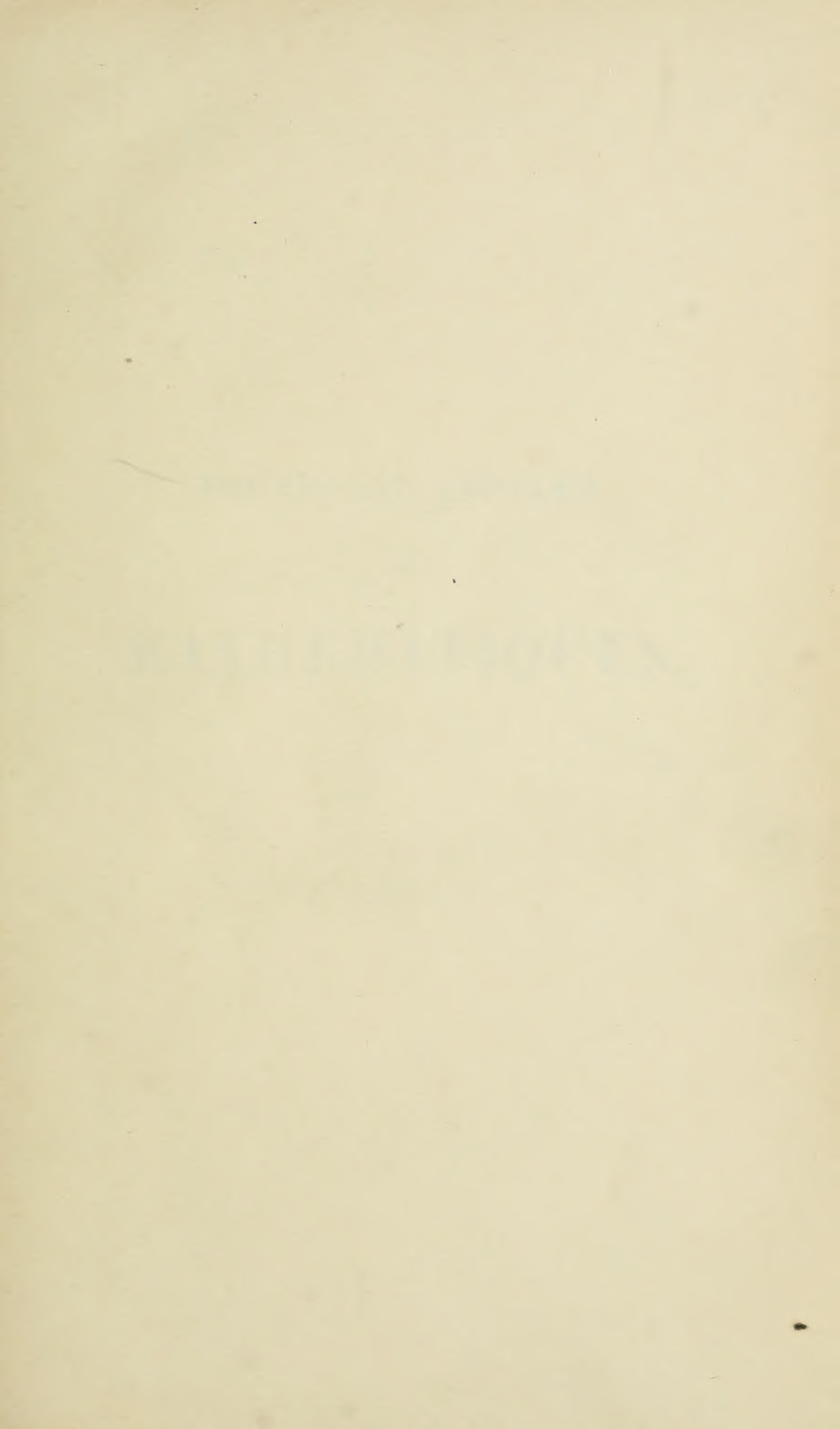




NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XII.

(LXXIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[D4b]

EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

L'étude des produits canoniques d'ordre fini dont la distribution de zéros est simple a été faite par un grand nombre d'auteurs ([1]); mais les cas plus généraux ne me semblent avoir été abordés que par M. Lindelöf ([2]) et ar M. Leau ([3]). Les résultats de M. Leau comprennent ceux de M. Lindelöf comme cas particulier; mais ils laissent échapper certains cas de distribution très régulière, c'est ainsi qu'ils ne s'appliquent pas au cas où la relation entre le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro, et n est

$$\log r_n = \rho \log n + \mathrm{K}(\log_2 n)^{\alpha}, \qquad \alpha > 1, \qquad \mathrm{K} > 0.$$

Je me propose ici d'obtenir la même approximation

([1]) Parmi lesquels MM. Wiman, Barnes, Mattson, Littlewood.

([2]) *Voir* LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1).

([3]) *Étude sur les fonctions entières orientées* (*Annales de l'École Normale*, 1906, p. 33).

que M. Leau, en faisant sur la distribution une hypothèse qui me semble plus souple, et par une méthode de calcul plus directe.

1. *Hypothèses et notations.* — Je considère un produit canonique dont je supposerai tout d'abord que *tous les zéros ont le même argument*, par un changement de variable, je puis supposer cet argument égal à π. Je suppose également que *l'ordre* ρ *n'est pas entier;* le genre p est alors égal à la partie entière de ρ, et si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, le produit s'écrit

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{-r_n}, p\right), \tag{1}$$

en posant

$$\mathrm{E}\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \left(1 + \frac{z}{r_n}\right) e^{-\frac{z}{r_n} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}}. \tag{2}$$

Ceci posé, je suppose que la relation qui lie r_n à n est la suivante

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}, \qquad n > \mathrm{N}; \tag{3}$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes que j'appelerai *conditions* A

$$\lim_{x=\infty} \alpha(x) = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} x \log x \, \alpha'(x) = 0;$$

[pour chaque valeur de $x > \mathrm{N}$, la fonction $\alpha(x)$ a une dérivée à droite et une dérivée à gauche].

Nous nous proposons de chercher une valeur asymptotique à $(1 + \varepsilon)$ près [1] du produit $f(z)$, lorsque z

---

[1] Je désignerai par ε toute quantité positive, négative ou complexe, tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n_0}$.

est extérieur à certains cercles entourant les zéros, nous poserons

$$B = \prod_{1}^{n_0 - 1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right), \qquad C = \prod_{n_0}^{n'-1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right),$$

$$D = E\left(\frac{z}{-r_{n'}}, p\right) \times E\left(\frac{z}{-r_{n'+1}}, p\right), \qquad F = \prod_{n'+2}^{\infty} \left(\frac{z}{-r_n}, p\right);$$

le nombre n' étant défini par la double inégalité

$$r_{n'} \leqq r \leqq r_{n'+1},$$

r désignant le module de z.

2. *Calcul de* B. — Comme le produit B a un nombre fini de facteurs, on a

$$B = e^{Mz^p(1+\varepsilon)},$$

M est la somme $\sum_{1}^{n_0 - 1} \frac{(-1)^p}{p r_n^p}$.

3. *Calcul de* C. — Nous pouvons écrire, pour $n < n'$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n}\left(1 + \frac{r_n}{z}\right) e^{-\frac{z}{r_n} - \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}},$$

et puisque $\frac{r_n}{r} < 1$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n} e^{-\frac{z}{r_n} - \dots - (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}} e^{\sum_{1}^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q}}.$$

Par suite on a

$$C = G \times H,$$

en posant

$$G = \frac{z^{n' - n_0 - 1}}{r_{n_0} \dots r_{n'-1}},$$

$$H = e^{-z \sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p} \sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n^p}} e^{\sum_{n=n_0}^{n=n'-1} \left[\sum_{1}^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q}\right]}.$$

le dernier exposant est la somme de $n' - n_0 - 1$ séries convergentes, en faisant la somme terme à terme, on peut écrire

$$\log H = \sum_{-p}^{+\infty}{}' \left[(-1)^{q+1} \frac{1}{q z^q} \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q \right],$$

la somme Σ' ne comprenant pas le terme correspondant à $q = 0$.

Pour calculer $\log H$ nous sommes ramenés au calcul des sommes telles que

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q, \qquad (q = -p, -p+1, \ldots),$$

or, nous avons

$$(4) \qquad \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = \int_{n_0}^{n'-\theta_q} x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} dx \qquad (0 < \theta_q < 1),$$

en tenant compte de l'égalité (3), et du fait que r_n croît (ou du moins ne décroît pas) avec n. Mais, par suite de la propriété de la fonction $\alpha(x)$ nous avons, en prenant n_0 assez grand,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[x.x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right] \\ &\quad = \frac{q+\rho}{\rho}\left[1 + \frac{q}{\rho}\alpha(x) + \frac{q}{q+\rho} x \log x\, \alpha'(x)\right] x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} \\ &\quad = \frac{q+\rho}{\rho}(1+\varepsilon_q)\, x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho+q}(1+\varepsilon'_q)\frac{d}{dx}\left[x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} x\right],$$

en portant dans l'expression (4), nous obtenons, en

supposant $\frac{n'}{n_0}$ suffisamment grand,

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = \frac{\rho}{\rho+q}(1+\varepsilon''_q)\left[x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}x\right]_{n_0}^{n'-\theta_q}$$

$$= (1+\varepsilon'''_q)\frac{\rho n'}{\rho+q}(n'-\theta_q)^{[1+\alpha(n'-\theta_q)]\frac{q}{\rho}}.$$

Or, d'après la définition de r, nous avons

$$r = (n'-\theta)^{[1+\alpha(n'+\theta)]\frac{1}{\rho}},$$

donc

$$(n'-\theta_q)^{[1+\alpha(n'-\theta_q)]\frac{q}{\rho}} = r^q\left(1-\frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}}(1-\varepsilon^{\text{IV}}_q) \qquad (0<\theta'_q<1);$$

et finalement nous avons

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = (1+\varepsilon_q)\frac{\rho n'}{\rho+q}r^q\left(1-\frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}},$$

d'où, en posant

$$z = re^{i\varphi},$$

$$\log H = n'\sum_{-p}^{+\infty}{}'(-1)^{q+1}\frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)}(1+\varepsilon_q)\left(1-\frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}}.$$

Mais la série

$$\sum_{-p}^{+\infty}{}'(-1)^{q+1}\frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)}$$

est absolument convergente, ainsi que celle figurant dans $\log H$, en prenant n' assez grand, la différence entre les Q premiers termes correspondants des deux séries est arbitrairement petite, et par suite nous avons

$$\log H = (1-\varepsilon_1)n'\sum_{-p}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^{q+1}\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)};$$

en prenant Q de façon que les restes soient négligeables [1].

Considérons maintenant $\log G$:

$$\log G = (n' - n_0 - 1)\log r - \sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n + (n' - n_0 - 1) i\varphi,$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n = \int_{n_0}^{n'-\theta} \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x \, . \, dx \qquad (0 < \theta < 1);$$

or,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right] = \frac{1+\alpha(x)}{\rho}\log x + \frac{\alpha'(x)\, x(\log x - 1)}{\rho},$$

et, d'après la propriété de la fonction $\alpha(x)$, le deuxième terme du second membre est arbitrairement petit, pourvu que n_0 soit assez grand, donc

$$\sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n = \left[\frac{1-\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right]_{n_0}^{n'-\theta} + \varepsilon(n' - n_0)$$
$$= n' \log r - k \log r - \frac{1+\varepsilon}{\rho} n',$$

en remarquant que $\log r - \log r_{n'}$ tend vers zéro et, comme enfin $\frac{\log r}{n'}$ tend vers zéro,

$$\log G = \frac{n'}{\rho}(1 + \varepsilon_2) + i\varphi\, n'(1 - \varepsilon_3).$$

En faisant la somme des expressions obtenues pour $\log H$ et $\log G$,

$$\log C = [1 + \varepsilon'(n', \varphi)]\, n' \left[\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{q=-p}^{q=+\infty}{}' \frac{(-1)^{q+1} \rho\, e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)}\right].$$

---

[1] Cette détermination de Q est indépendante de n'.

4. *Calcul de* F. — Pour $n \geq n' + 1$, nous avons

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = e^{\sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q}},$$

d'où

$$\log F = \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \left[\sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q} \right].$$

Puisqu'il y a convergence absolue on peut intervertir l'ordre des sommations, et écrire

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} \left[(-1)^{q+1} \frac{z^q}{q} \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n q} \right],$$

le calcul des sommes

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \int_{n'+1+\theta_{1q}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}} \qquad (0 < \theta_{1q} < 1)$$

se fait comme précédemment et nous obtenons

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \frac{\rho n'}{q-\rho}(1+\varepsilon_q) r^q \left(1 + \frac{2\theta'_{1q}}{n'}\right)^{-\frac{q}{\rho}} \qquad (0 < \theta'_{1q} < 1).$$

En portant dans l'expression de $\log F$, nous aurons

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(q-\rho)} (1+\varepsilon_q) \left(1 + \frac{2\theta'_{1q}}{n'}\right)^{-\frac{q}{\rho}} n',$$

ou encore, par un raisonnement analogue à celui fait pour $\log H$,

$$\log F = [1 + \varepsilon''(n', \varphi)] n' \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^q \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)}.$$

5. *Calcul de* B.C.F. — En faisant la somme des

expressions obtenues pour log B, log C, log F, nous avons, en remarquant que

$$\sum_{q=-p}^{q=+\infty}{}' \frac{(-1)^{q+1}\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho-q)} = \sum_{q=-\infty}^{q=p}{}' \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)},$$

et que $\frac{\varepsilon p}{n}$ tend vers zéro,

$$\log BCF = [1+\varepsilon'''(n',\rho)]\, n' \left[\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)}\right].$$

Entre crochets nous avons une fonction méromorphe de ρ, le dénominateur est *sin* $\pi\rho$, puisque ses zéros sont $\rho = 0, \pm 1, \ldots \pm q, \ldots$; le résidu relatif au pôle q est $(-1)^q e^{i\varphi q}$, le numérateur de la fonction méromorphe est donc une fonction $\Phi(\rho)$ telle que

$$\Phi(q) = (-1)^q e^{i\varphi q} \times \left(\frac{d}{d\rho}\sin\pi\rho\right)_{\rho=q},$$

ou

$$\Phi(q) = \pi e^{i\varphi q}.$$

Comme la fonction $\pi e^{i\varphi\rho}$ répond à la question, on a

$$\Phi(\rho) = e^{i\varphi\rho}\pi + \Psi(\rho)\sin\pi\rho,$$

$\Psi(\rho)$ étant une fonction entière.

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^q \rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)} = \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin\pi\rho} + \Psi(\rho) \qquad (-\pi \leq \varphi \leq +\pi);$$

et en tenant compte de la décomposition de la fonction méromorphe $\frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin\pi\rho}$ en fractions simples [1] on voit que

---

[1] *Voir* E. PICARD. *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 173, 174; et LINDELÖF, *Calcul des résidus*, p. 38 et note de la page 32.

$\Psi(\varphi) \equiv 0$. Nous aurons donc l'égalité

$$\log(\mathrm{BCF}) = [1 + \varepsilon''(r'_1, \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n'.$$

6. *Calcul de* D. — Puisque $\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \varepsilon$ (comme on le voit immédiatement), on a

$$\log \mathrm{D} = \log \left(1 + \frac{z}{r_{n'}}\right) \left(1 + \frac{z}{r_{n'+1}}\right) - k, \qquad k \text{ fini.}$$

Excluons les zéros par des cercles ayant pour centre ces zéros et pour rayons r_n^{-a} $(a > 0)$, nous aurons à l'extérieur de ces cercles

$$|\log \mathrm{D}| < 2(a + 1) \log r,$$

et comme $\frac{n'}{\log r}$ croît indéfiniment

$$|\log \mathrm{D}| = \varepsilon |\log(\mathrm{BCF})|.$$

Nous arrivons ainsi à l'égalité

$$(5) \quad \log f(z) = [1 + \varepsilon(n', \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n' \qquad (-\pi \leqq \varphi \leqq -\pi).$$

valable pour z suffisamment grand, et à l'extérieur de cercles décrits autour des zéros et de rayons inversement proportionnels aux modules des zéros ; n' est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$, $\varepsilon(n', \varphi)$ une fonction complexe de n' et φ, tendant vers zéro avec $\frac{1}{n'}$.

Si l'argument des zéros, au lieu d'être égal à π, est égal à ω, il suffira de remplacer, dans l'égalité (5), φ par $\varphi + \pi - \omega$ $(\omega - 2\pi \leqq \varphi \leqq \omega)$.

7. En supposant que les arguments des zéros, au lieu d'être tous égaux, *tendent vers une valeur* ω, l'égalité précédente a encore lieu. Supposons encore

$\omega = \pi$, nous devrons dans les calculs remplacer r_n par $r_n e^{i\omega_n}$, ω_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Prenons n_0 assez grand pour que

$$|\omega_n| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n > n_0,$$

ε étant donné.

Dans le calcul de C, on voit facilement que log G est multiplié par $1 + \eta$, η étant inférieur à $\rho\varepsilon$; d'autre part dans log H, les sommes Σr_n^q sont remplacées par

$$\sum_{r_0}^{n'-1} r_n^q e^{i\omega_n q},$$

Pour $q < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q e^{i\omega_n q} = (1 + \eta'_q) \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \qquad (|\eta'_q| < \sqrt{\varepsilon});$$

la somme des Q premiers termes de log H est multipliée par $(1 + \eta')$, $|\eta'| < \sqrt{\varepsilon}$ $\left(\text{Q partie entière de } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, le reste est inférieur en module à

$$\sum_{Q}^{+\infty} \left(\frac{1}{q r^q} \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \right) = n' \sum_{Q}^{+\infty} \frac{q(\rho + q)}{\rho} (1 + \varepsilon_q) \left(1 - \frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}},$$

en prenant Q assez grand, c'est-à-dire ε assez petit, ce reste est négligeable $\left(\text{il est inférieur à } \eta' \frac{A}{Q}\right)$. En résumé log C est multiplié par $(1 + \eta'')$, $\eta'' \lessgtr \sqrt{\varepsilon}$.

On constatera le même fait pour log F et, par suite, l'extension est établie.

De même, si le produit $f(z)$ est multiplié par $e^{P_p(z)}$, où $P_p(z)$ désigne un polygone de degré p, l'égalité (5) est encore valable.

8. *Fonctions $f(z)+a$.* — Les modules des zéros d'une fonction entière satisfaisant à la condition (A), et leurs arguments tendant vers une valeur déterminée ω, on a l'égalité asymptotique

$$(6) \qquad f(z) = e^{(1-\varepsilon)\frac{\pi e^{i\rho(\varphi+\pi-\omega)}}{\sin \pi\rho} n} \qquad (\omega - 2\pi \leq \varphi \leq \omega),$$

où n est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$; on déduit de là des résultats relatifs aux zéros des fonctions

$$f(z) + a.$$

Supposons $\omega = \pi$, on voit immédiatement que les zéros des fonctions $f(z)+a$ forment des files dont les arguments ont pour limite possible les nombres

$$\pm \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} \quad \text{et} \quad \pi \qquad (q = 0, \pm 1, \ldots).$$

Cherchons le nombre des zéros de module inférieur à $r = |z|$ pour l'une des files $\pm\frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi\rho}{\rho}$, comme $f(z)$ n'a pas de zéros en dehors de la direction π, ce nombre est égal à la différence des nombres des zéros des fonctions $f(z)$ et $f(z)+a$, c'est-à-dire à la variation d'argument de $1 + \frac{a}{f(z)}$ lorsqu'on fait décrire au point z un contour formé de la façon suivante : les deux droites $\pm\frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} - \varepsilon$, $\pm\frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} + \varepsilon$, et deux arcs de cercle de rayon r_0 et r; l'expression de $f(z)$ montre que ce contour contient

$$n \frac{1}{2(\sin \pi\rho)} (1 + \varepsilon)$$

zéros de $f(z) + a$.

Si $\rho > p + \frac{1}{2}$, il existe $2(p+1)$ files de zéros en dehors de la file possible d'arguments π; si $\rho \leq p + \frac{1}{2}$

il y en a $2p$ seulement; on constatera de plus que, si $\rho > p + \frac{1}{2}$, il n'y a pas de zéros dont les arguments ont pour limite π; si $\rho \leqq p + \frac{1}{2}$ il y en a $n(1+\varepsilon)$. En résumé le rapport des nombres des zéros des fonctions $f(z) + a$ et $f(z)$ a pour limite $\frac{p+1}{|\sin \pi\rho|}$ si $\rho > p + \frac{1}{2}$; $\frac{p}{|\sin \pi\rho|} + 1$ si $\rho \leqq p + \frac{1}{2}$. Il importe de remarquer que ces limites ne sont pas atteintes *uniformément* quel que soit a, les zéros dont les arguments tendent vers des valeurs autres que π se présentent pour des modules d'autant plus grands que $|a|$ est plus petit.

L'étude de l'influence produite par les variations de a sur les zéros de $f(z) + a$ revient d'ailleurs à l'étude compliquée de la fonction inverse de la fonction $f(z)$.

9. *Exposant brut et exposant net de la suite des zéros d'une fonction entière.* — Pour justifier l'introduction des conditions (A) je vais démontrer la proposition suivante; étant donnée la suite

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

des modules des zéros d'une fonction entière d'ordre ρ; *on peut trouver des fonctions* $\alpha(x)$ *satisfaisant aux conditions* (A) *et telles qu'on ait*

$$r_n \leqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \qquad (n > N),$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n.

Posons

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\rho \log r_n} - 1,$$

il résulte de la définition de ρ que la suite σ_n admet

zéro pour limite supérieure pour n infini. Je vais construire une fonction $\beta(x)$ définie pour $x > r_N$, satisfaisant aux conditions (A) et telles que

$$\beta(r_n) \geqq \sigma_n,$$

quel que soit $n > N$;

$$\beta(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Soit $\Theta(x)$ une fonction positive dérivable, satisfaisant à la deuxième condition (A) et croissante indéfiniment lorsque x croît ([1]). A chaque valeur σ_n faisons correspondre la fonction $y_n(x)$ définie comme il suit :

1° Pour $x \leqq r_n$

$$y_n(x) = \theta(x) - \theta(r_n) + \sigma_n,$$

2° Pour $x \geqq r_n$

$$y_n(x) = -\theta(x) + \theta(r_n) + \sigma_n;$$

soient alors x_0 un nombre quelconque et p défini par les inégalités

$$r_p \leqq x_0 < r_{p+1}:$$

parmi les nombres $y_n(x_0)$, $n \leqq p$, il y en a un plus grand ou égal à tous les autres ; il en est de même pour $y_n(x_0)$ lorsque $n \geqq p+1$, car

$$y_n(x_0) - y_{p+1}(x_0) = \sigma_n - \sigma_{p+1} - \theta(r_n) + \theta(r_{p+1}),$$

et comme $\theta(x)$ croît indéfiniment, et que σ_n a pour limite supérieure zéro, cette différence est négative à partir d'une certaine valeur de n, il y a aussi un

---

([1]) Une telle fonction est aisée à former, par exemple

$$\theta(x) = \log_1 x$$

nombre fini de nombres $y_n(x_0)$ supérieurs à $y_{p+1}(x_0)$, il y en a un plus grand que tous les autres.

Considérons alors la fonction $\gamma(x)$ qui pour chaque valeur de x est égale au plus grand des nombres $y_n(x)$, cette fonction coïncide successivement avec un certain nombre de fonctions $y_n(x)$ (de part et d'autre de $x = r_n$), elle satisfait donc déjà aux trois conditions

$$\lim_{x=\infty} \gamma'(x) x \log x = 0,$$
$$\gamma(r_n) \geqq \sigma_n,$$

quel que soit $n > N$,

$$\gamma(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Si elle tend vers zéro c'est une fonction $\beta(x)$ cherchée ; sinon considérons une fonction $-\varepsilon(x)$ satisfaisant aux conditions (A), croissante et dérivable, la fonction égale pour chaque valeur de x au plus grand des deux nombres $\gamma(x)$ et $-\varepsilon(x)$ tend vers zéro : c'est une fonction $\beta(x)$ [1].

Nous avons ainsi, à partir d'une certaine valeur de n,

$$n = r_n^{(1+\sigma_n)\rho} \leqq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

nous dirons que la suite $(1+\sigma_n)\rho$ est l'*exposant brut* de la suite des zéros, la fonction $\rho[1+\beta(x)]$ est l'*exposant net*. La fonction

$$x^{\rho[1+\beta(x)]}$$

est croissante, comme on le constate en employant les propriétés de la fonction $\beta(x)$: si nous écrivons la

(1) Je suppose qu'une infinité de nombres $\sigma_n + \varepsilon(r_n)$ sont positifs, ce qui est facile à réaliser.

fonction inverse sous la forme

$$x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$$

nous aurons, à partir d'une certaine valeur de n,

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

il reste à montrer que $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (A). Or nous avons

$$y = x^{\rho[1+\beta(x)]}, \qquad x = y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}},$$

d'où

$$\log y = \rho[1-\beta(x)]\log x, \qquad [1-\beta(x)][1-\alpha(y)] = 1:$$

par suite, lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$ tend vers zéro et par conséquent aussi $\alpha(y)$; de plus, en dérivant les deux égalités précédentes, on obtient

$$\beta'(x)[1-\alpha(y)] + \alpha'(y)[1+\beta(x)]y' = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(1+\varepsilon)\rho}{x} \qquad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon = 0\right),$$

en portant dans la première de ces égalités la valeur de y' tirée de la seconde, et remplaçant ρ par

$$\frac{\log y}{\log x}\,\frac{1}{1+\beta(x)},$$

on aura

$$\alpha'(y)[1-\beta(x)]y\log y$$
$$+(1+\varepsilon)[1+\beta(x)][1+\alpha(y)]\beta'(x)x\log x = 0.$$

Lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$, $\alpha(y)$, ε tendent vers zéro ainsi que $\beta'(x)x\log x$, donc

$$\lim_{y=\infty} \alpha'(y)\,y\log y = 0.$$

La proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée, on peut introduire dans l'égalité (6) la fonc-

tion inverse de

$$x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}},$$

et l'on aura

$$(7)\quad \begin{cases} \log f(z) = (1+\varepsilon)\dfrac{\pi}{\sin\pi\rho}\, e^{i\rho[\varphi+\pi-\omega]}\, r^{[1+\beta(r)]\rho} \\ \qquad (\omega - 2\pi \leq \varphi \leq \omega). \end{cases}$$

$[1+\beta(r)]\rho$ est un *exposant net*, égal ici à l'exposant brut pour toutes les valeurs de r_n.

10. *Application aux fonctions de genre zéro.* — Si l'on désigne par $M(r)$ le maximum du module d'une fonction entière de genre zéro pour $|z| = r$, et par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, on a évidemment

$$M(r) < \prod_1^\infty \left(1 - \frac{r}{r_n}\right) < \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right),$$

en désignant par $\alpha(x)$ une fonction telle que

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \qquad (n > N),$$

fonction qui a été calculée au paragraphe précédent. Or, nous avons trouvé une égalité asymptotique (7) pour

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right),$$

égalité d'où nous tirons

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right) = e^{(1+\varepsilon)\frac{\pi}{\sin\pi\rho} r^{[1+\beta(r)]\rho}}.$$

$x^{[1+\beta(x)]\rho}$ désigne la fonction inverse de $x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$ donc $[1+\beta(r)]\rho$ est un exposant net de la suite des zéros

de la fonction donnée. Nous arrivons donc au résultat suivant : *le logarithme du module maximum pour* $|z| = r$ *d'une fonction entière de genre zéro* [1] *reste, à partir d'une certaine valeur de* r, *inférieur à l'expression*

$$(1+\varepsilon)\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,r^{[1+\beta(r)]\rho} \qquad \left(\lim_{r=\infty} r = 0\right),$$

où $\rho[1-\beta(x)]$ *est un exposant net de la suite des zéros.*

Cette limite supérieure est atteinte lorsque l'exposant net est constamment égal à l'exposant brut.

[H2cβ]

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER PAR DES CONIQUES SPHÉRIQUES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,
Professeur au Lycée de Poitiers.

---

1. L'intégrale générale de l'équation différentielle d'Euler,

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0,$$

dans laquelle $R(t)$ est un polynome du quatrième degré,

$$R(t) \equiv a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4.$$

---

[1] Et naturellement d'ordre non entier (< 1) comme dans ce qui précède.

est, d'après Stieltjes, de la forme

$$\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \lambda & 1 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_2 - 2\lambda & \frac{1}{2}a_3 & -(x+y) \\ \lambda & \frac{1}{2}a_3 & a_4 & xy \\ 1 & -(x+y) & xy & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Des simplifications profondes se produisent lorsque le polynome $R(t)$ est simultanément bicarré et réciproque; en posant, en effet,

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = 1,$$

l'intégrale précédente se réduit à

$$\frac{(xy+1)^2}{1+\lambda} + \frac{(xy-1)^2}{1-\lambda} + \frac{(x+y)^2}{\frac{1}{2}a_2 - \lambda} = 0.$$

Considérons x et y comme étant les paramètres des génératrices isotropes d'une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité, c'est-à-dire posons

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{x+y}{xy+1}, \\ p_2 = i\dfrac{y-x}{xy+1}, \\ p_3 = \dfrac{xy-1}{xy+1}; \end{cases}$$

la relation entre x et y entraîne une relation linéaire et homogène entre les carrés de p_1, de p_2 et de p_3; celle-ci peut être ramenée à la forme symétrique

$$(2) \qquad \frac{p_1^2}{a+\sigma} + \frac{p_2^2}{b+\sigma} + \frac{p_3^2}{c+\sigma} = 0,$$

par un simple changement de notations, en posant

$$a_2 = 2\,\frac{2c - a - b}{a - b},$$

$$\lambda = \frac{b - 2c - \sigma}{b + \sigma};$$

ainsi donc l'intégrale générale de l'équation d'Euler est réductible à la forme (2), au moyen de la transformation définie par les formules (1), dans le cas où le polynome $R(t)$ est simultanément bicarré et réciproque, ce polynome pouvant être toujours égal à

$$(3) \qquad R(t) \equiv t^4 - 2\,\frac{a + b - 2c}{a - b}\,t^2 + 1;$$

a, b et c désignent des constantes.

L'équation (2) représente, sur la sphère d'équation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1,$$

une famille dépendant du paramètre variable σ, de coniques sphériques, dont il est possible de donner diverses définitions.

On observera tout d'abord que les cônes représentés par l'équation (1) constituent une famille de cônes homofocaux; *les coniques sphériques (2) sont dès lors homofocales.*

2. Cherchons plus généralement la forme que doit avoir le polynome $R(t)$, du quatrième degré pour que la transformation définie par les formules (1) fasse correspondre une conique sphérique à l'intégrale générale de l'équation d'Euler.

Afin d'éviter des calculs compliqués, j'appliquerai des résultats trouvés par M. Kœnigs, en utilisant un certain système de coordonnées introduit par M. Darboux; l'intégrale générale de l'équation d'Euler a été

transformée par M. Kœnigs en une conique d'un faisceau tangentiel.

En posant

$$X = xy,$$
$$Y = x + y,$$

l'intégrale générale de l'équation d'Euler, attachée au polynome général du quatrième degré, est la conique $f(X, Y) = 0$ dont l'équation tangentielle est

$$(4) \quad a_4 u^2 + a_2 uw + a_0 w^2 - a_3 uv - a_1 wv + \lambda(uw - v^2) = 0,$$

en coordonnées homogènes.

En vertu des relations (1), on a les relations suivantes entre X, Y, p_1 et p_3 :

$$X = \frac{1 + p_3}{1 - p_3}, \qquad Y = \frac{2p_1}{1 - p_3};$$

introduisons des coordonnées ponctuelles X, Y, Z homogènes et considérons la transformation définie par les formules

$$(5) \qquad X = 1 + p_3, \qquad Y = 2p_1, \qquad Z = 1 - p_3.$$

Cette transformation fait se correspondre les courbes du plan (x, y, z) et de la sphère d'équation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1;$$

la transformée d'une conique quelconque d'équation

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

est une quartique biquadratique située sur la quadrique

$$A(1 + p_3)^2 + 4A'p_1^2 + A''(1 - p_3)^2 + 4Bp_1(1 - p_3)$$
$$+ 2B'(1 - p_3^2) + 4B''p_1(1 + p_3) = 0;$$

pour que cette biquadratique soit une conique sphérique, il est nécessaire et suffisant que, dans cette

dernière équation, les termes en p_1 et en p_3 disparaissent ; il faut donc que les conditions

$$A - A'' = 0, \qquad B + B'' = 0$$

soient remplies ; ce sont les conditions qui en coordonnées ($X, Y = 1, Z$) expriment que la conique admet la droite

$$X + Z = 0,$$

pour axe de symétrie.

Si l'équation tangentielle de la même conique est

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

les conditions sont par conséquent

$$a - a'' = 0, \qquad b + b'' = 0 ;$$

en appliquant à la conique (4), on obtient ainsi

$$a_0 - a_4 = 0, \qquad a_1 + a_3 = 0 ;$$

de ces dernières formules résulte le théorème suivant

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation définie par les formules (1) *change en des coniques sphériques les courbes intégrales de l'équation d'Euler est que l'équation*

$$R(t) = 0$$

soit invariante dans la tranformation

$$t = -\frac{1}{\tau}.$$

Par analogie avec les polynomes réciproques (l'équation $R(t) = 0$ est résoluble en prenant $t - \frac{1}{t}$ pour inconnue), je dirai que le polynome $R(t)$ est alors *semi-réciproque*.

3. Plaçons-nous donc dans le cas

$$a_4 = a_0, \qquad a_3 = -a_1$$

d'un polynome semi-réciproque. Les coniques sphériques sont alors

$$4(A + 2A' + B')p_1^2 - (A + B')p_2^2 + 2Ap_3^2 - 4Bp_1p_3 = 0;$$

l'équation tangentielle d'un cône, d'équation ponctuelle

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xz = 0,$$

est d'autre part

$$\beta\gamma u^2 + (\alpha\gamma - \delta^2)v^2 + \alpha\beta w^2 - 2\beta\delta uw = 0;$$

des relations

$$\begin{aligned}
\alpha &= A + 2A' + B', & a &= a'' = AA' - B^2,\\
\beta &= A + B', & a' &= A^2 - B'^2,\\
\gamma &= 2A, & b &= -b'' = -B(A + B'),\\
\delta &= -2B, & b' &= -B^2 - A'B',
\end{aligned}$$

on déduit l'équation tangentielle du cône

$$\beta\gamma(u^2 + v^2 + w^2) + 4av^2 + (2a - a' - 2b')w^2 - 4buw = 0$$

ou

$$\beta\gamma(u^2 - v^2 - w^2) - 4a_0v^2 + (2a_0 - a_2)w^2 + 2a_1uw = 0;$$

sous cette dernière forme, le paramètre λ n'intervient que par l'intermédiaire de $\beta\gamma$: les cônes considérés sont donc homofocaux au cône

$$4a_0v^2 - (2a_0 - a_2)w^2 + 2a_1uw = 0.$$

Cette même propriété peut être établie par le raisonnement suivant. Les formules (5) transforment la conique

$$Y^2 - 4XZ = 0$$

d'équation tangentielle

$$v^2 - uw = 0.$$

en le cercle $p_2 = 0$ de la sphère. Toute droite du plan est transformée en un petit cercle de la sphère, section par un plan parallèle à l'axe Op_2; toute tangente (u, v, w) à la conique

$$v^2 - uw = 0.$$

est transformée en un cercle de rayon nul ayant pour centre le point de la sphère dont les coordonnées sont

$$\xi = -\frac{2v}{u+w}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{w-u}{w+u};$$

une courbe quelconque du plan est ainsi transformée en une courbe sphérique; celle-ci, puisque la transformation est ponctuelle et par conséquent de contact, peut être envisagée comme enveloppée par les cercles de la sphère qui sont les transformés des tangentes de la courbe plane. Parmi ces cercles, ceux qui correspondent aux tangentes communes avec la conique

$$v^2 - uw = 0$$

auront leur rayon nul. Une conique du faisceau tangentiel (4) étant tangente à quatre tangentes fixes de la conique précédente, la conique sphérique transformée sera tangente à quatre cercles de rayon nul fixes.

En posant

$$\delta^2 = a_1^2 - 8a_0^2 - 4a_0a_2,$$

δ étant une quantité qui n'est pas nulle si $R(t)$ n'est pas carré parfait, on peut prendre pour coordonnées des tangentes fixes :

$$u - w = -a_1 \pm \delta,$$

$$u - w = \pm\sqrt{16a_0^2 + (a_1 \pm \delta)^2},$$

$$v = 2a_0;$$

en portant ces valeurs dans les expressions de ξ et de ζ on obtient quatre points du cercle $\eta = 0$ deux à deux diamétralement opposés. Les cônes de sommet O et qui définissent les coniques sphériques ont donc deux focales fixes dans le plan $p_2 = 0$.

Il résulte donc de ces considérations que, *lorsque les formules* (1) *associent des coniques sphériques aux intégrales de l'équation d'Euler, ces coniques sphériques sont nécessairement homofocales.*

4. Revenons maintenant au cas particulier initialement envisagé : celui où le polynome $R(t)$ est simultanément bicarré et réciproque et a la forme (3). L'intégrale a été transformée en la conique sphérique (2) qui reste homofocale à elle-même lorsque σ varie.

Il est alors possible de donner deux interprétations géométriques de l'équation d'Euler ressortissant à la Géométrie réglée.

En premier lieu, je rappellerai qu'à tout complexe de droites Sophus Lie associe une équation de Monge (ou de Pfaff) dont les intégrales sont les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe.

Au complexe tétraédral

$$a p_1 p_4 + b p_2 p_5 + c p_3 p_6 = 0,$$

attaché aux quadriques

$$\frac{X^2}{a+\lambda} + \frac{Y^2}{b+\lambda} + \frac{Z^2}{c+\lambda} = \text{const.},$$

Sophus Lie associe l'équation de Monge

$$(b-c)x\,dy\,dz + (c-a)y\,dz\,dx + (a-b)z\,dx\,dy = 0;$$

si l'on se propose de déterminer, sur la sphère de

centre O et de rayon 1, les courbes du complexe tétraédral il suffit d'intégrer l'équation précédente où l'on a respectivement remplacé x, y et z par p_1, p_2 et p_3; on obtient ainsi

$$\Sigma a\, dp_1(p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2) = 0; \tag{6}$$

en utilisant alors les formules (1) on est conduit à l'équation d'Euler avec le polynome (3). Ainsi donc *les courbes* (2) *ne sont autres que les courbes du complexe tétraédral situées sur la sphère.*

5. De même qu'à tout complexe de droites Sophus Lie associa une équation de Monge-Pfaff *particulière*, il est possible d'associer à toute équation de Monge-Pfaff un complexe *particulier* par la considération du problème de Transon (*cf.* le Chapitre III de ma Thèse *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné*, Paris, 1911).

D'une façon précise, étant donné un complexe invariant dans l'homothétie infinitésimale de pôle O, le problème de Transon, pour ce complexe d'équation

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

est équivalent à l'intégration sur la sphère

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

de l'équation de Monge-Pfaff

$$C(p_1, p_2, p_3, dp_1, dp_2, dp_3) = 0.$$

Il résulte de ces considérations que, pour le complexe associé à l'équation (6), le problème de Transon est *a priori* réductible à l'intégration de l'équation d'Euler. C'est ce que je vais établir directement.

6. Dans une Communication à l'Académie des Sciences *Sur les normales aux quadriques* (22 décembre 1890), M. G. Humbert a montré que les normales aux quadriques

$$\frac{X^2}{(b+\sigma)(c+\sigma)}+\frac{Y^2}{(c+\sigma)(a+\sigma)}+\frac{Z^2}{(a+\sigma)(b+\sigma)}-1=0.$$

dépendant du paramètre σ, engendrent un complexe du troisième ordre.

Plus particulièrement, les cônes homocycliques du second degré, d'équation

$$(a+\sigma)X^2+(b+\sigma)Y^2+(c+\sigma)Z^2=0,$$

définissent un complexe du troisième ordre qui n'est autre que le complexe des génératrices des quadriques homothétiques aux quadriques d'un faisceau homofocal; l'équation de ce complexe est

$$(7)\quad (b-c)p_1p_5p_6+(c-a)p_2p_6p_4+(a-b)p_3p_4p_5=0$$

ou encore

$$ap_4x_0+bp_5y_0+cp_6z_0=0,$$

en introduisant les coordonnées ordinaires (x_0, y_0, z_0) de la projection orthogonale de l'origine sur le rayon de coordonnées plückériennes $(p_1, \ldots, p_6)$.

Proposons-nous de résoudre le problème de Transon pour ce complexe. En se reportant alors à un article précédent [1] et appliquant les formules (5) et (7) de cet article

$$p_4=\frac{i}{2}(1+xy)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial y}-q\frac{\partial p_1}{\partial x}\right),$$

. . . . ;

$$x_0=\frac{1}{2}(1+xy)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial y}+q\frac{\partial p_1}{\partial x}\right),$$

. . . . ;

---

[1] *Sur certaines transformations de droites* (***Enseignement mathématique***, 1911, p. 363).

on trouve l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \qquad p^2 \sum_1^3 a \left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right)^2 = q^2 \sum_1^3 a \left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right)^2,$$

dont dépendent les surfaces trajectoires du complexe, considérés comme enveloppes des plans

$$x(X - iY) + y(X + iY) + (xy - 1)Z = \varpi.$$

L'intégration de cette équation aux dérivées partielles (8) est équivalente à celle de l'équation différentielle du premier ordre

$$dx^2 \sum_1^3 a \left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right)^2 = dy^2 \sum_1^3 a \left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right)^2;$$

appliquant les formules qui donnent les dérivées partielles de p_1, p_2 et p_3, cette équation différentielle devient précisément l'équation d'Euler dans laquelle le polynome $R(t)$ a la forme (3).

Ainsi donc, conformément au paragraphe précédent, *la solution du problème de Transon, pour le complexe dégénéré du complexe de M. Humbert, dépend de l'intégration de l'équation d'Euler.*

L'équation générale des surfaces trajectoires orthogonales des droites du complexe est

$$\frac{p_1^2}{a + \Pi(\varpi)} + \frac{p_2^2}{b + \Pi(\varpi)} + \frac{p_3^2}{c + \Pi(\varpi)} = 0,$$

$\Pi(\varpi)$ désignant une fonction arbitraire de ϖ.

Les coniques sphériques (2) sont les courbes de contact avec la sphère des développables circonscrites à cette sphère et aux diverses surfaces trajectoires orthogonales de droites du complexe.

P.-S. — M. Cl. Guichard a eu la bonté de me signaler récemment que j'avais consacré plusieurs articles à une transformation de l'espace réglé déjà envisagée par Ribaucour, dans ses recherches sur les *congruences isotropes*, puis par Antomari, dans ses travaux sur les *surfaces réglées*. En remerciant M. Guichard, je m'empresse de porter cette remarque à la connaissance des lecteurs des *Nouvelles Annales* et de profiter de l'occasion pour indiquer quels sont les résultats que j'avais retrouvés.

Il s'agit de la transformatiou de droites, à laquelle j'avais été conduit à propos des *complexes de droites*, ainsi que je l'explique à la page 83 de ma Thèse *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné*, et que j'avais appliquée dans les articles suivants :

1° Sur une transformation de droites (*Nouvelles Annales*, juin 1909);

2° Sur les surfaces de M. Appell (*Nouvelles Annales*, juin 1910);

3° Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface eentrale (*Nouvelles Annales*, avril 1911);

4° Sur un complexe du quatrième ordre (*Nouvelles Annales*, mai 1911);

5° Sur certaines transformations de droites (*Enseignement mathématique*, septembre 1911).

Dans la première Note, j'avais signalé l'application de cette transformation de droites aux congruences isotropes de Ribaucour; dans la cinquième, j'avais remarqué qu'une représentation des congruences à laquelle on fait jouer un rôle à la projection d'un point fixe sur chaque rayon se rattache à la représentation

la plus générale d'une congruence de droites par Ribaucour. Effectivement, l'illustre géomètre s'était occupé de cette transformation de droites, « mais d'une manière accessoire », selon l'expression d'Antomari : « Ribaucour s'était borné à la définir et à l'utiliser pour déduire une congruence isotrope d'une autre congruence isotrope ». Ribaucour avait d'autre part déterminé analytiquement les congruences de normales dont l'enveloppée moyenne est un point, c'est-à-dire les congruences de droites normales aux surfaces désignées par L. Bianchi, dans ses *Lezioni di Geometria differenziale*, sous la dénomination de surfaces de M. Appell.

Mais ce fut surtout Antomari qui, dans sa Thèse remarquable (*Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées; mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions*, Paris, 1894), étudia la même transformation de droites et l'appliqua à divers problèmes concernant notamment les surfaces développables et leurs transformées. Antomari signala des applications de cette transformation aux congruences; il étudia le cas du plan et de la congruence transformée; il établit que la congruence de normales la plus générale est transformée en la congruence la plus générale admettant le pôle pour enveloppée moyenne; il mit en évidence l'invariance des congruences de normales aux surfaces de M. Appell. Il fit enfin ressortir l'analogie de cette transformation avec la transformation de droites de M. Guichard, qui permet de déduire, de toute congruence de normales, une congruence dont la surface moyenne est un plan.

[R1c]

SUR L'EXTENSION DE LA NOTION DE VITESSE;

PAR M. ET. DELASSUS.

I. — VITESSE D'UN SYSTÈME DE VECTEURS.

1. Considérons un point mobile M rapporté simultanément à deux trièdres fixes T et T_1. Les coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1 dans ces deux trièdres sont liées par les formules de transformation

$$x = a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

dans lesquelles les coefficients sont des constantes dont la signification est bien connue. Par dérivation on en déduit

$$x' = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 y'_1 + \alpha_3 z'_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui exprime que le vecteur V_1 de composantes x'_1, y'_1, z'_1, dans T_1 a x', y', z' pour composantes dans le trièdre T. Autrement dit, *le vecteur appliqué au point* M *et ayant pour composantes les dérivées des coordonnées est indépendant du trièdre de référence.*

C'est ce vecteur, qui est complètement déterminé par le mouvement du point, qu'on appelle *vitesse du point.*

Si le trièdre T est fixe et le trièdre T_1 mobile, les coefficients de la transformation ne sont plus des constantes et la dérivation donne

$$x' = (a' + \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 + \alpha'_3 z_1) + (\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 y'_1 + \alpha_3 z'_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ce qu'on interprète immédiatement en introduisant la vitesse d'entraînement et la vitesse relative et l'on obtient la règle classique de composition des vitesses.

2. Les raisonnements précédents s'appliquent sans aucune modification à un système S de vecteurs. Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$ ses coordonnées dans deux trièdres fixes. Les formules de transformation sont de la forme

$$\mathcal{X} = \alpha_1 \mathcal{X}_1 + \beta_1 \mathcal{Y}_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}_1 + \lambda_1 \mathcal{L}_1 + \mu_1 \mathcal{M}_1 + \nu_1 \mathcal{N}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et donnent par dérivation

$$\mathcal{X}' = \alpha_1 \mathcal{X}'_1 + \beta_1 \mathcal{Y}'_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}'_1 + \lambda_1 \mathcal{L}'_1 + \mu_1 \mathcal{M}'_1 + \nu_1 \mathcal{N}'_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui montrent que le système ayant $\mathcal{X}'_1$, $\mathcal{Y}'_1$, $\mathcal{Z}'_1$, $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{M}'_1$, $\mathcal{N}'_1$ pour coordonnées dans T_1 a $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, pour coordonnées dans T, ou encore :

Étant donné un système S *de vecteurs, variable avec le temps, le système* S' *ayant pour coordonnées les dérivées des coordonnées du système* S *est indépendant du trièdre de référence.*

Par analogie, nous dirons que *le système* S' *est la vitesse du système* S.

Supposons maintenant que le trièdre T soit fixe, mais que T_1 soit mobile ; les coefficients de la transformation seront variables et la dérivation donnera

$$\begin{aligned}\mathcal{X}' = \;& (\alpha'_1 \mathcal{X}_1 + \beta'_1 \mathcal{Y}_1 + \gamma'_1 \mathcal{Z}_1 + \lambda'_1 \mathcal{L}_1 + \mu'_1 \mathcal{M}_1 + \nu'_1 \mathcal{N}_1)\\ &+ (\alpha_1 \mathcal{X}'_1 + \beta_1 \mathcal{Y}'_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}'_1 + \lambda_1 \mathcal{L}'_1 + \mu_1 \mathcal{M}'_1 + \nu_1 \mathcal{N}'_1),\end{aligned}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qu'on interprétera encore en introduisant *le système* S'_e

vitesse d'entraînement de S et *le système* S′, *vitesse relative de* S, et l'on sera encore conduit à la propriété classique :

La vitesse absolue d'un système de vecteurs est la résultante de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative.

3. Effectuons simultanément la réduction des deux systèmes S et S′ en un point fixe que nous prendrons pour origine d'un trièdre fixe de référence. On obtiendra ainsi un vecteur R et un couple G pour le système S et, de même, un vecteur R′ et un couple G′ pour le système S′.

Les coordonnées du point R seront $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, sa vitesse sera $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, c'est-à-dire équipollente au vecteur R′.

De même, les coordonnées du point G seront $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, sa vitesse sera $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, c'est-à-dire équipollente à G′, de sorte que :

Si l'on réduit simultanément en un point fixe un système S *de vecteurs et sa vitesse* S′, *les éléments de réduction de* S′ *sont respectivement équipollents aux vitesses des extrémités des éléments de réduction de* S,

théorème de Cinématique qui a la même forme que l'interprétation géométrique bien connue des théorèmes sur les quantités de mouvement et peut, d'ailleurs, fournir cette interprétation comme conséquence presque immédiate.

4. La notion de vitesse d'un système de vecteurs est absolument distincte de la notion bien connue de *dérivée géométrique d'un vecteur*. Ces deux notions

ne coïncident que dans le cas où le système S se réduit à un vecteur unique variable, mais dont l'origine reste fixe.

La vitesse d'un système de vecteurs s'introduit tout naturellement en Dynamique par la remarque classique que les coordonnées

$$x'',\quad y'',\quad z'',\quad yz''-zy'',\quad zx''-xz'',\quad xy''-yx'',$$

du vecteur accélération d'un point sont les dérivées des coordonnées

$$x',\quad y',\quad z',\quad yz'-zy',\quad zx'-xz',\quad xy'-yx',$$

du vecteur vitesse de ce point, ce qui permet de dire, au sens que nous adoptons :

L'accélération d'un point est la vitesse de sa vitesse.

Si nous multiplions la vitesse par la masse, sa vitesse sera également multipliée par la masse ce qui donnera le vecteur opposé à la force d'inertie; donc :

La force d'inertie d'un point matériel en mouvement est à chaque instant opposé à la vitesse de sa quantité de mouvement.

La propriété existant pour tous les points d'un système matériel existe pour le système lui-même; donc :

Le système des forces d'inertie d'un système matériel en mouvement est à chaque instant opposé à la vitesse de la quantité de mouvement de ce système matériel.

Si l'on désigne par $\mathfrak{J}$ le système des forces d'inertie, par $\mathfrak{Q}$ le système des quantités de mouvement et par $\mathcal{Q}$

sa vitesse, on a donc, à chaque instant, l'égalité géométrique

$$(\mathcal{S}) + (\mathcal{Q}') = 0.$$

5. La notion de vitesse d'un système de vecteurs s'introduit encore tout naturellement quand on considère deux systèmes variables S, S_1 et leur moment

$$\mathfrak{M}t(S, S_1) = \mathcal{L}\mathcal{X}_1 + \mathfrak{M}\mathcal{Y}_1 + \mathfrak{N}\mathcal{Z}_1 + \mathcal{X}\mathcal{L}_1 + \mathcal{Y}\mathfrak{M}_1 + \mathcal{Z}\mathfrak{N}_1.$$

On en déduit, par dérivation,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathfrak{M}t(S, S_1) \\ &\quad = (\mathcal{L}'\mathcal{X}_1 + \mathfrak{M}'\mathcal{Y}_1 + \mathfrak{N}'\mathcal{Z}_1 + \mathcal{X}'\mathcal{L}_1 + \mathcal{Y}'\mathfrak{M}_1 + \mathcal{Z}'\mathfrak{N}_1) \\ &\qquad + (\mathcal{L}\mathcal{X}'_1 + \mathfrak{M}\mathcal{Y}'_1 + \mathfrak{N}\mathcal{Z}'_1 + \mathcal{X}\mathcal{L}'_1 + \mathcal{Y}\mathfrak{M}'_1 + \mathcal{Z}\mathfrak{N}'_1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en introduisant les vitesses de S et de S_1,

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{M}t(S, S_1) = \mathfrak{M}t(S', S_1) + \mathfrak{M}t(S, S'_1),$$

formule analogue à celle de la dérivée d'un produit et qui donne la dérivée d'un moment comme somme de deux moments. Si l'un des systèmes, S_1 par exemple, est fixe, la formule se réduit simplement à

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{M}t(S, S_1) = \mathfrak{M}t(S', S_1).$$

II. — Vitesse d'un solide.

6. M. Kœnigs, dans son *Traité de Cinématique*, a développé et rendu classique la notion de système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses dans un solide en mouvement.

L'une des propriétés essentielles est celle qui est relative à la composition des mouvements et s'énonce comme il suit :

Le système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses absolues d'un solide s'obtient en composant géométriquement le système représentatif de l'état des vitesses d'entraînement et le système représentatif de l'état des vitesses relatives.

Nous nous bornerons à faire remarquer que cette propriété s'énonce exactement comme celles qui sont relatives au point ou au système de vecteurs, sauf le remplacement de « vitesse » par « système représentatif de l'état des vitesses ».

Il y aurait donc intérêt, pour uniformiser le langage et avoir un même énoncé s'appliquant à un plus grand nombre de cas, à *convenir d'appeler* vitesse d'un solide *le système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses de ses différents points.*

Si l'on adopte cette définition on pourra dire :

La vitesse d'un point quelconque d'un solide est le moment en ce point de la vitesse du solide ;

et

Qu'il s'agisse d'un point, d'un système de vecteurs ou d'un corps solide, la vitesse absolue est toujours la résultante géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.

7. Proposons-nous de chercher la vitesse d'entraînement d'un système S_1 de vecteurs, c'est-à-dire la vitesse d'un système invariable S_1 attaché à un corps solide connaissant la vitesse S de ce solide.

Soit O un point du solide. Soient R, G, R_1, G_1 les éléments de réduction de S et S_1 en ce point ; R_1 et G_1 sont invariables et attachés au solide.

La vitesse de S_1 est la résultante de sa vitesse dans la rotation R et de sa vitesse dans la translation G.

Dans la rotation R, le point O reste fixe, donc les éléments de réduction de la vitesse correspondante de S_1 sont équipollents aux vitesses des extrémités de R_1 et G_1, c'est-à-dire, puisque ces extrémités sont des points attachés au solide, équipollents aux moments de R aux points R_1 et G_1.

Dans la translation G du solide, le couple G_1 reste équivalent à lui-même, donc ne donne rien dans la vitesse de S_1. Quant au vecteur R_1, subissant cette translation, on voit immédiatement, soit géométriquement, soit analytiquement, que sa vitesse est un couple dont le moment changé de sens est celui de R_1 au point G.

En résumé, on a un vecteur et deux couples respectivement perpendiculaires aux trois plans RR_1, R_1G et RG_1.

Si l'on permute S et S_1, c'est-à-dire si l'on cherche la vitesse d'entraînement de S dans un solide dont la vitesse serait S_1, on voit immédiatement que le vecteur et les deux couples ne font que changer de sens. Les deux vitesses obtenues sont donc opposées, fait géométrique qu'on peut écrire

$$(S'_e)_{S_1} + (S'_{1,e})_S = 0.$$

Enfin, soient Δ, Δ_1 les axes centraux de S et S_1, Δ' leur perpendiculaire commune et O un point du solide choisi de façon qu'à l'instant considéré il se trouve sur Δ'. On voit immédiatement que, si l'on fait la réduction de S et S_1 en O, les directions R, G, R_1, G_1 sont toutes dans le plan perpendiculaire à Δ', donc le vecteur et les deux couples de la vitesse d'entraînement de S_1 sont dirigés suivant Δ' qui est ainsi l'axe central de cette vitesse ; d'où cette propriété très simple :

L'axe central de la vitesse d'un système de vecteurs attaché à un solide est la perpendiculaire commune à l'axe central de ce système et à l'axe central de la vitesse du solide.

[N¹16a]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ÉLIE PARROD.

Dans cette Note, j'ai pour but d'établir le théorème suivant et d'en déduire quelques conséquences :

THÉORÈME. — *Si deux quadrilatères* ABCD, A′B′C′D′, *inscrits dans une même conique sont homologiques, les six points* (AB. C′D′), (AC. D′B′), (AD. B′C′), (A′B′.CD), (A′C′. DB), (A′D′. BC) *sont sur une droite* Δ, *passant par le centre d'homologie* P *et tangente en ce point* P *aux deux coniques* ABCDP, A′B′C′D′P′.

Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème d'Aubert. Il se déduit facilement du théorème bien connu suivant :

THÉORÈME. — *Considérons une conique variable passant par quatre points fixes* A, B, C, D *et rencontrant en* M, N, *deux droites fixes* AP, BP *issues de* A *et* B; *la droite* MN *passe par le point d'intersection de la droite* CD *et de la tangente en* P *à la conique* ABCDP.

En effet, les points M, N décrivent sur AP et BP deux

divisions homographiques qui ont le point P commun; la droite MN passe par un point fixe O situé sur la tangente en P à la conique du faisceau qui passe par P; une conique particulière se compose des deux droites AB, CD, donc ce point fixe O est sur la droite CD.

Ceci étant : dans le théorème précédent, la conique considérée passe par les quatre points A, B, C, D, et les deux droites CP, DP rencontrent la conique en C′, D′; la tangente en P à la conique ABCDP passe par l'intersection O des droites AB, C′D′; la conique A′B′C′D′P montre que le point O est sur la tangente en P. Donc ces deux coniques sont tangentes en P et la tangente en P est PO.

Les autres combinaisons montrent que les cinq autres points sont sûr cette droite Δ.

Applications.

I. Soient Γ, Γ′ deux coniques se coupant en quatre points A, B, C, D. Prenons le centre d'homologie P sur la conique Γ, on obtient le quadrilatère homologique A′B′C′D′ inscrit dans la conique Γ′; à cette figure, il correspond une droite Δ tangente en P à Γ.

Exemple. — Les normales PA, PB, PC, PD menées d'un point P à une conique la rencontrent en A′, B′, C′, D′, la droite Δ correspondante est tangente en P à l'hyperbole d'Apollonius.

Avec les symétriques des points A, B, C, D par rapport au centre O′ on aurait une droite Δ tangente en ce point à cette hyperbole; la conique A′B′C′D′O′ est tangente en O′ à l'hyperbole d'Apollonius.

II. Le point P peut être supposé à l'infini.

Exemple. — Si dans un cercle on mène quatre

cordes parallèles AA′, BB′, CC′, DD′, on obtiendra une droite Δ parallèle aux cordes, qui sera une asymptote de deux hyperboles, l'une passant par A, B, C, D et l'autre par A′, B′, C′, D′.

III. La conique peut être remplacée par un système de deux droites.

Exemple. — Un cercle est rencontré par deux sécantes en A, B, C, D ; prenons, sur le cercle, le centre d'homologie P ; il correspond quatre points A′, B′, C′, D′ sur les deux sécantes, ce qui donne quatre points situés sur la tangente en P au cercle.

IV. Le quadrilatère ABCD peut être remplacé par un triangle et une tangente en un sommet ou par une corde et les tangentes aux extrémités.

Exemple. — Soient une conique, un axe AB, le cercle ayant pour diamètre cet axe et les tangentes aux sommets correspondants A, B. Prenons le point P sur la conique, les droites PA, PB rencontrent le cercle en A′, B′ ; la tangente en A′ au cercle rencontre la tangente en B au point B_1 et la tangente en B′ au cercle rencontre la tangente en A au point A_1 ; la droite A_1B_1 est tangente en P à la conique.

V. Supposons, pour terminer, que trois points A, B, C soient confondus et considérons la conique osculatrice en ce point ; elle rencontre la conique donnée en D et passe par un point P situé sur la tangente en D à cette conique donnée qui est rencontrée en A′ par PA.

DA′ rencontre la tangente en A au point E, la tangente en A′ rencontre AD en F ; la droite EF est tangente en P.

Je me bornerai à ces quelques applications et je laisserai au lecteur le soin de transformer la propriété par polaires réciproques.

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené.** — La règle donnée à la page 349 du volume des *Nouvelles Annales* pour 1911, relativement au signe du discriminant, peut s'énoncer ainsi :

Le discriminant de l'équation

$$ax^m + \ldots + g$$

étant mis sous la forme

$$a^{m-1}g^{m-1} + \ldots,$$

ce discriminant est égal au produit des carrés des différences des racines par un facteur dont le signe est celui de $(-1)^{\frac{m.m-1}{2}}$. Cela donne bien le signe $+$ si m ou $m-1$ est multiple de 4, si m est de l'une des formes $4k$, $4k+1$, le signe $-$ si m ou $m-1$ est simplement pair, si m est de l'une des formes $4k+2$, $4k+3$.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

Question de cours. — *Étude du maximum et du minimum d'une fonction d'une, de plusieurs variables indépendantes.*

Maximum et minimum relatifs.

Maximum et minimum dans le cas d'une fonction implicite.

Application : maximum et minimum du carré de la distance d'un point à une surface $z = f(x, y)$.

Méthode de Fermat. Application.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Lignes asymptotiques du conoïde*

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer φ de façon que l'une d'elles ait pour équation

$$a^2(x^4 + y^4) = (y^2 - x^2)^2(y^2 + x^2).$$

Déterminer la fonction de variable complexe $z = P - iQ$ satisfaisant à $2xyP + \varphi(y^2 - x^2) + 2xy(x^2 + y^2)^2 = 0$.

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - a}$$

dans laquelle a est un nombre positif donné.

Démontrer que les surfaces intégrales sont des surfaces réglées.

2° *Déterminer celle des surfaces intégrales qui contient la courbe qui a pour équations*

$$x = 2z, \qquad x^2 + y^2 = 4a^2.$$

Exprimer les coordonnées d'un point quelconque x, y, z, de cette surface S en question en fonction des deux paramètres u, v obtenus en posant

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v.$$

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface* S.

4° *Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de cette surface* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$2yy' = x(y'^2 + 1) + y'^4 - 3y'^2;$$

Il existe en particulier une intégrale passant par le point $x = 0$, $y = -1$, *et admettant pour tangente en ce point une droite de coefficient angulaire* $y' = 0$, *construire cette courbe.* (Juillet 1911.)

Bordeaux.

PREMIÈRE QUESTION. — *Considérant la surface* Σ *enveloppe de la sphère variable*

$$(x - a)^2 + [y - f(a)]^2 + z^2 = 1.$$

1° *Trouver géométriquement une première famille de lignes de courbure de cette surface;*

2° *Démontrer que la deuxième famille est formée de courbes planes qui se projettent sur le plan des xy suivant une famille de courbes parallèles;*

3° *Déterminer géométriquement les centres de courbure principaux pour un point quelconque de* Σ.

DEUXIÈME QUESTION. — *En désignant par* P *et* Q *deux fonctions données des deux variables indépendantes* x *et* y *et en posant*

$$u = y^2 - x,$$

trouver à quelles conditions doivent satisfaire les deux fonctions P *et* Q *pour que la différentielle*

$$P\,dx + Q\,dy$$

admette un facteur intégrant qui soit fonction de u seulement. Montrer que si cette condition est remplie ce facteur intégrant s'obtient par quadrature.

Appliquer à l'intégration de

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

en supposant

$$P = (2y^2 - 2x - 1)e^2 + (2y^2 - 3x)e^y,$$
$$Q = 2ye^2 + 2x(y^2 + y - x)e^y.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires, soient* C *une surface conique ayant pour équation*

$$2xy - z^2 = 0$$

et T *une surface cylindrique ayant pour équation*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

où les radicaux ont les déterminations positives.

On considère le solide A *d'étendue finie complètement limité par une portion de* C *et une portion de* T. *Calculer :*

1° *Le volume de* A;

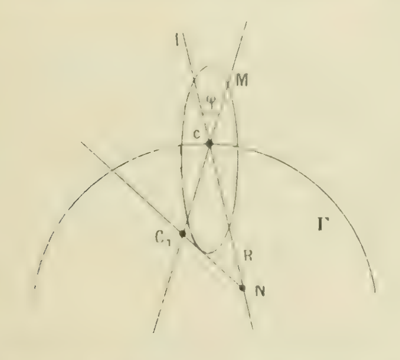
2° *L'aire de la portion de surface conique qui le limite;*

3° *L'aire de la portion de surface cylindrique qui le limite.*

SOLUTION.

1° La surface Σ est une surface canal. La caractéristique qui est un grand cercle de la sphère variable constitue une première famille de lignes de courbure.

2° L'angle d'une normale MC à la surface Σ, qui est aussi



normale à ce lieu des centres des sphères, avec la normale principale est donné par

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{ds}{T};$$

comme le lieu φ centre est une courbe plane Γ

$$y = f(n),$$

$$\frac{1}{T} = 0$$

et

$$\varphi = \varphi_0.$$

Par suite la deuxième famille de lignes de courbure est formée de courbes planes qui se projettent sur le plan des xy suivant des courbes parallèles à Γ;

3° En un point M de Σ le premier centre de courbure est C; l'autre est donné par l'intersection de MC avec la droite polaire de Γ qui est ici perpendiculaire au plan de Γ menée par le centre de courbure R correspondant à C.

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Désignant par $f(x, y, z)$ une fonction donnée de trois variables indépendantes x, y et z, on demande de déterminer la forme la plus générale que peut avoir une fonction $\varphi(x, y, z)$ des mêmes variables pour que la différentielle totale*

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \varphi(x, y, z)\,dz$$

soit complètement intégrable? Montrer que, dans ce cas, la différentielle précédente peut être ramenée sans aucune quadrature, à une différentielle totale à deux variables seulement, convenablement choisies.

2° *Montrer que toute différentielle totale à trois variables indépendantes peut être ramenée, en la multipliant par un facteur convenable, à la forme* (1).

Quel procédé d'intégration peut-on déduire de ce qui précède pour les différentielles complètement intégrables à trois variables indépendantes?

II. *Sur la surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est*

$$z = X - \frac{y^2}{4X},$$

X *étant une fonction donnée de* x:

1° *Déterminer les courbes C conjuguées des sections de la surface par les plans parallèles au plan* zOy;

2° *Déterminer les trajectoires orthogonales des projections des courbes C sur le plan* zOy.

Épreuve pratique. — *Calculer, en employant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx.$$

(Novembre 1910.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$2y(2a-x)\frac{\partial z}{\partial x} - (x^2 - z^2 - y^2 - 4ax)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0,$$

où z *désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes* x *et* y, *et* a *une constante positive donnée.*

En supposant que x, y, z *désignent les coordonnées rectangulaires d'un point variable, faire voir que l'une quelconque des surfaces définies par l'intégrale générale est engendrée par un cercle; calculer, en un point quelconque du cercle générateur, le cosinus de l'angle du plan tangent à la surface avec le plan du cercle, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

Particulariser la fonction arbitraire qui entre dans l'intégrale de manière que la surface correspondante contienne la courbe

$$x = 0,$$
$$z(y^2 + z^2) = 8a^3.$$

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, on considère un cône de révolution autour de OZ, ayant son sommet à l'origine O, et dont les génératrices font un angle* α *avec OZ. On considère d'autre part, sur la partie positive de OX, un point fixe A, à une distance donnée* a *de l'origine; on mène par le point A dans le plan XOY*

une droite faisant l'angle α *avec* OX, *et par cette droite un plan parallèle à* OZ. *Soit* L *la ligne d'intersection de ce plan et du cône.*

Former l'équation de la surface engendrée par la ligne L *quand on fait varier l'angle* α, *faire voir que cette surface est réglée, et chercher les trajectoires orthogonales de ses génératrices rectilignes.*

Épreuve pratique. — *Construire en coordonnées rectangulaires l'une des courbes définies par l'équation différentielle*

$$dx = \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x.

(Juin 1910.)

Épreuve écrite. — I. *Déterminer une surface par la double condition :*

1° *Que les coordonnées rectangulaires* x, y, z *d'un point variable de cette surface vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{3a^2}{z^2},$$

où a *désigne une longueur constante donnée ;*

2° *Que la surface contienne la parabole*

$$x = 0,$$
$$z^2 = 2ay\sqrt{2}.$$

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère la surface réglée représentée par les formules*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = f(\theta),$$

où r, θ *désignent deux paramètres arbitraires, et* $f(\theta)$ *une fonction donnée de* θ.

Déterminer sur la surface une ligne telle qu'en un quel-

conque de ses points la génératrice coupe sous un angle constant donné α *à l'une des deux lignes de courbure.*

Construire la projection de cette ligne sur le plan XOY *dans l'hypothèse particulière*

$$\alpha = \frac{\pi}{6},$$
$$f(\theta) = a \cos\theta,$$

où a *désigne une longueur constante donnée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système des équations différentielles linéaires*

$$\frac{du}{dx} = u - v - w - 2\cos x - \sin x,$$
$$\frac{dv}{dx} = -2u + 3v - w - 7\cos x - \sin x,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3u - 2w - 4\cos x + \sin x.$$

(Juin 1911.)

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Soient trois axes de coordonnées rectangulaires* $Oxyz$. *Trouver une surface* S *telle que le plan tangent en un point quelconque* M *de cette surface contienne le symétrique par rapport à* O *du point de rencontre de la normale en* M *à* S *avec le plan* Oxy. *On supposera l'équation de* S *sous la forme* $z = f(x, y)$, *et l'on formera l'équation* A *que doit vérifier* f;

2° *Les cylindres paraboliques ayant pour section droite une parabole de foyer* O *et de directrice parallèle à* Oz, *sont des surfaces* S;

3° *Indiquer une intégrale complète de l'équation* A;

4° *Intégrer le système différentiel des caractéristiques de l'équation* A.

Épreuve pratique. — *Évaluer, à 0,001 près, l'intégrale*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{30x^3 - x - 24}{x^3(x^2 - 3x + 4)^2}\,dx.$$

(Novembre 1910.)

QUESTIONS.

2185. — Les points de rencontre des génératrices perpendiculaires d'un paraboloïde hyperbolique sont sur une hyperbole: les plans de ces génératrices enveloppent un cône du second ordre dont les lignes focales sont perpendiculaires aux plans directeurs du paraboloïde.

(Klug.)

2186. — Si l'on désigne par p un nombre premier et par P le nombre p^α, α pouvant être nul, le nombre

$$C_{P(p-1)}^{Pk} - (-1)^k$$

est multiple de p.

(G. F.)

2187. — La somme des produits qu'on obtient en multipliant trois à trois les entiers inférieurs à n est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times \frac{n(n-1)}{2}.$$

(G. F.)

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES.

Par M. Maurice FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. *Introduction.* — Vers la fin de 1908, M. Darboux a publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* plusieurs Notes relatives à l'étude des systèmes de surfaces triplement orthogonales qu'il appelle *réversibles*. Ce sont ceux pour lesquels le mouvement relatif du trièdre des axes de coordonnées par rapport au trièdre des trois normales engendre un nouveau système orthogonal dont les axes ainsi déplacés sont les trois normales. Les surfaces qui constituent ce système sont des cyclides de Dupin.

Je me suis proposé d'étudier la même question par les procédés de la géométrie pure, et je suis parvenu à retrouver par ce moyen, et sans aucun calcul, un grand nombre des résultats obtenus par M. Darboux. J'ai fait la discussion des différentes formes que peut affecter le système réversible et j'ai démontré que tous les systèmes orthogonaux composés exclusivement de cyclides dérivent par inversion d'un système réversible. J'ai ajouté quelques remarques sur ces systèmes.

J'emploie la méthode Darboux-Combescure qui consiste, comme on le sait, à partager le problème en deux parties. On étudie d'abord le mouvement à trois paramètres, autour d'un sommet fixe, d'un trièdre tri-

rectangle dont les arêtes sont parallèles aux normales aux trois surfaces et ensuite on cherche à déterminer la translation de ce trièdre de manière que, dans la variation de chacun des trois paramètres, le sommet engendre une des surfaces du système.

2. *Les lignes de courbure d'un système réversible sont planes.* — Soit $Oxyz$ le trièdre mobile dont les arêtes Ox, Oy, Oz sont respectivement parallèles aux normales aux surfaces obtenues en laissant constant l'un des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, et OXYZ le trièdre fixe formé par les trois axes de coordonnées. Le déplacement de $Oxyz$ dépend de neuf rotations dont chacune est la composante, suivant l'une des arêtes du trièdre mobile, de la rotation de ce trièdre déterminée par la variation d'un seul des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2. On connaît les conditions nécessaires et suffisantes pour que le déplacement du trièdre appartienne à un système triple orthogonal. Elles sont au nombre de trois. Il faut et il suffit que trois rotations soient nulles, savoir la rotation autour de Ox quand ρ varie seule, la rotation autour de Oy quand ρ_1 varie seule et la rotation autour de Oz quand ρ_2 varie seule. La première de ces conditions exprime que quand ρ varie seule, le trièdre mobile $Oxyz$ tourne autour d'un axe situé dans le plan Oyz. Le mouvement du trièdre mobile est donc défini par le roulement du plan Oyz sur un cône fixe.

Le mouvement inverse, c'est-à-dire le mouvement relatif du trièdre des axes de coordonnées OXYZ par rapport au trièdre $Oxyz$, sera donc défini par le roulement de ce cône devenu mobile sur le plan Oyz rendu fixe. Mais, pour que ce mouvement inverse engendrât un nouveau système orthogonal, il faudrait que

le cône se réduisît à un plan, ce qui est impossible. Il ne peut se réduire qu'à une droite, et alors l'axe de rotation est un axe permanent situé dans le plan Oyz. Donc pour que le système soit réversible, il faut et il suffit que quand ρ varie seule, la rotation du trièdre se fasse autour d'un axe permanent situé à la fois dans le plan Oyz et dans le plan OYZ et que, quand ρ_1 ou ρ_2 varie seule, deux autres conditions analogues soient vérifiées.

On en déduit immédiatement que les lignes de courbure de chacune des surfaces du système sont planes. En effet, laissons ρ_2 constante et faisons varier ρ et ρ_1. Nous obtiendrons une surface du système dont la normale sera parallèle à Oz et dont la représentation sphérique des lignes de courbure sera fournie par le déplacement du point C de l'axe Oz qui se trouve à une distance de l'origine égale à l'unité de longueur. La ligne de courbure qui correspond à la variation de ρ seule aura donc pour représentation sphérique la ligne décrite par C quand ρ varie seule. Mais puisqu'alors la rotation se fait autour d'un axe permanent, le point C décrira un cercle de la sphère. Or, les tangentes aux différents points d'une ligne de courbure sont parallèles aux tangentes aux points correspondants de sa représentation sphérique. Donc toutes ces tangentes sont dans un même plan et la ligne de courbure considérée est bien plane. Il en est évidemment de même de toutes les autres lignes de courbure obtenues en faisant varier seule soit ρ, ρ_1 ou ρ_2.

3. *Détermination de la représentation sphérique du système orthogonal.* — On voit de plus que la représentation sphérique de chaque surface du système se compose d'un réseau de cercles orthogonaux. Or on

sait qu'un pareil réseau tracé sur une sphère est formé des cercles dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites conjuguées par rapport à la sphère.

Soit OABC l'une des positions du tétraèdre mobile, A, B, C étant à une distance de l'origine égale à l'unité de longueur. Nous venons de voir que si ρ varie seule, ce tétraèdre tourne autour d'un axe permanent qui est l'intersection des plans OBC et OYZ. Donc le point C décrit un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à cet axe et par conséquent parallèle au plan OAX et, en particulier, à la droite fixe OX. Si maintenant nous faisons varier ρ_1, le plan de ce cercle se déplacera en passant par une droite fixe (D); puisqu'il reste parallèle à OX, il faut que la droite (D) soit parallèle à OX. De même quand ρ_1 varie seule le point C décrit un cercle dont le plan est parallèle à OY, et quand ensuite on fait varier ρ_1 le plan de ce cercle tourne autour d'une droite (D') parallèle à OY. Enfin, puisque les droites (D) et (D') doivent être conjuguées, il faut que leur perpendiculaire commune passe par le centre de la sphère; celle-ci est donc l'axe OZ. On voit alors que la représentation sphérique de tout le système doit être telle que si l'une des trois variables reste constante, le point correspondant du tétraèdre mobile décrive un réseau orthogonal formé de cercles dont les plans passeront par deux droites conjuguées perpendiculaires à l'axe de coordonnées correspondant. Il reste à voir si une pareille représentation sphérique est possible.

Soit OABC une position particulière du tétraèdre mobile. Par A, je mène dans le plan tangent à la sphère les droites AQ et AR respectivement parallèles à OB et OC; de même par B les droites BP' et CR' respectivement parallèles à OA et OC, et enfin par C les droites CP'' et CQ'' respectivement parallèles à OA

et OB. Par AQ je fais passer un plan parallèle à OY, lequel rencontre l'axe OX en G et coupe le plan OXY suivant une droite (E) parallèle à OY. Je prends sur OX le point G_1 conjugué de G par rapport à la sphère et par G_1 je mène la droite (F) parallèle à OZ. Les deux droites (E) et (F) sont conjuguées. Les plans passant par A et par chacune des deux droites (E) et (F) doivent donc couper la sphère suivant deux cercles orthogonaux; donc ils coupent le plan tangent en A suivant deux droites perpendiculaires, et puisque le premier passe par AQ le second passe par AR. Si alors j'avais mené par AR un plan parallèle à OZ, ce plan, identique au plan passant par A et (F), aurait coupé OX au point G_1 conjugué de G. De même les plans parallèles à OX et à OZ menés par BP' et CQ' détermineront sur OY les deux points conjugués H et H_1 par lesquels passeront les deux droites conjuguées (D') et (F') parallèles à OX et OZ. Enfin les plans menés par CP' et CQ'' parallèlement à OX et OY détermineront sur OZ les points conjugués K et K_1, par lesquels passeront les deux droites conjuguées (D'') et (E'') respectivement parallèles à OX et à OY.

Désignons par OU, OV, OW les intersections respectives des trois plans OBC, OCA, OAB avec les plans de coordonnées OYZ, OZX, OXY. OU est perpendiculaire à la fois à OA et à OX; OV à OB et à OY; OW à OC et à OZ.

La position du trièdre OABC dépend de trois paramètres. A chacune de ses positions correspondent trois couples de points conjugués, un sur chacun des axes. Supposons qu'on fixe les points K et K_1. On définira ainsi sur la sphère le réseau des cercles orthogonaux dont les plans passent respectivement par (D'') et (E''), réseau décrit par le point C. Les tangentes à deux de

ces cercles, en l'un de leurs points d'intersection, rencontreront respectivement les droites (D″) et (E″), et le trièdre formé par le rayon de la sphère OC et les parallèles menées du centre à ces deux tangentes sera l'une des positions du trièdre précédent; mais l'ensemble de ces nouvelles positions ne dépend plus que de deux paramètres. Si l'on déplace le point C sur celui de ces deux cercles dont le plan passe par (D″), la rotation se fera autour de l'axe OU qui est perpendiculaire au plan de ce cercle puisqu'il est perpendiculaire d'une part à la tangente de ce cercle parallèle à OA et d'autre part à OX parallèle à (D″). Si on le déplace sur l'autre cercle, la rotation se fera autour de OV. Si alors on veut passer d'une position à une autre infiniment voisine, mais quelconque dans l'ensemble à deux paramètres, il faudra faire tourner le trièdre autour d'un axe situé dans le plan OUV.

Supposons maintenant qu'on fixe les points H et H_1. On aura un nouvel ensemble de positions du trièdre et l'on passera de l'une à l'autre infiniment voisine par une rotation autour d'un axe situé dans le plan OUW. Si alors on fixe à la fois les points H, H_1 et les points K et K_1 le trièdre ne pourra plus que tourner autour de l'axe OU, si les trois droites OU, OV, OW ne sont pas dans un même plan, ce qu'on peut toujours supposer puisque le trièdre initial est absolument quelconque, si toutefois la position du trièdre mobile dépend bien, comme nous l'avons supposé, de trois variables indépendantes.

Le trièdre tournant autour de OU, les points G et G_1 se déplaceront nécessairement sur OX. En effet, on peut amener le trièdre à une position infiniment voisine quelconque dans l'ensemble à trois paramètres en le faisant tourner successivement autour

de OU, OV et OW. La première rotation laisse fixes les points H, H_1, K et K_1. Les deux autres laissent fixes les points G et G_1. Donc, si G et G_1 restaient fixes pendant la rotation autour de OU, ils resteraient immobiles pour tout déplacement du trièdre, même pour un déplacement fini que l'on peut toujours considérer comme une suite de déplacements infiniment petits. Mais alors il arriverait que, quelle que fût la valeur de ρ, le point A décrirait toujours le même réseau sphérique, et la position du trièdre ne dépendrait que de deux paramètres.

Ainsi quand le trièdre tourne autour de OU, sa position est fonction de celle des deux points conjugués G et G_1 et si l'on considère l'ensemble de toutes les positions possibles du trièdre mobile, cette position est une fonction de trois variables ρ, ρ_1, ρ_2 servant à fixer l'une la position des points conjugués G et G_1, l'autre celle de H et H_1, et la troisième celle de K et K_1. Quand l'une de ces trois variables varie seule, le trièdre tourne autour de l'une des trois droites OU, OV, OW conformément aux conditions de notre problème, et ainsi se trouve constituée la représentation sphérique du système orthogonal.

4. *Cas où l'ensemble des positions du trièdre mobile ne dépend que de deux paramètres.* — Examinons maintenant le cas où les trois droites OU, OV, OW sont dans un même plan (T). La droite OU, intersection des plans OBC et OYZ, est perpendiculaire à la fois à OA et à OX. Donc, le plan OAX est perpendiculaire au plan (T). Il en est de même des plans OBY et OCZ. Alors ces trois plans passeront par une même droite OS perpendiculaire au plan (T). La position du trièdre est déterminée par celle de la droite OS, et,

comme celle-ci a une direction arbitraire, l'ensemble des positions du trièdre satisfaisant à la condition indiquée, dépend de deux paramètres, comme cela résulte d'ailleurs de la discussion précédente. Laissons fixes les points K et K_1 : nous aurons encore sur la sphère un réseau de cercles orthogonaux que décrira le point C. Les plans de ces cercles passeront l'un par la droite (D″) parallèle à OX et l'autre par la droite (E″) parallèle à OY. Le premier contient de plus la tangente au cercle, laquelle est parallèle à OA, et l'autre la tangente au second cercle, parallèle à OB. Donc le premier plan est parallèle au plan OAX et l'autre au plan OBY. L'intersection CI des plans des deux cercles est donc parallèle à OS et par conséquent aussi au plan OCZ qui contient OS. Mais le plan OCZ passe par le point C. Donc la droite CI est dans ce plan-là et rencontre l'axe OZ. Mais le plan d'un des deux cercles rencontre OZ en K et l'autre en K_1. Il faut donc que les deux points K et K_1 coïncident, et comme ils sont conjugués, ils ne peuvent se confondre qu'en l'un des points Z_1 où l'axe OZ rencontre la sphère, et les deux droites (D″) et (E″) sont en ce point-là tangentes à la sphère.

De même les points G et G_1 se confondent en l'un des points d'intersection X_1 de la sphère avec l'axe OX, et les points H et H_1 en l'un des points d'intersection Y_1 de la sphère avec OY. Les trois variables ρ, ρ_1, ρ_2 ne peuvent plus servir à fixer la position de ces points devenus tous immobiles. Si on laisse ρ_2 invariable, on aura sur la sphère le réseau des cercles orthogonaux dont les plans passent par l'une ou l'autre des tangentes à la sphère en Z_1, parallèles à OX ou à OY. Si l'on fait varier ρ_2 ce réseau reste le même, mais les cercles correspondant à une même valeur de ρ ou

ρ_1 sont modifiés. Il en résulte que toutes les surfaces d'une même famille ont la même représentation sphérique, et même que toutes les surfaces des trois familles ont des représentations sphériques égales, mais différant par leur position sur la sphère. Au reste, une pareille représentation sphérique d'un système orthogonal existe bien, puisque c'est celle du système formé par les sphères tangentes à l'origine à l'un ou à l'autre des trois plans de coordonnées. Nous verrons plus loin que la même représentation sphérique appartient aussi à des systèmes composés de cyclides particulières.

Enfin il ne faut pas omettre le cas particulièrement simple où la position du trièdre mobile ne dépend que des variables ρ et ρ_1 et reste la même quand on fait varier ρ_2.

5. *Les surfaces formant le système orthogonal réversible ont toutes leurs lignes de courbure circulaires.* — Passons maintenant à l'étude des surfaces composant le système orthogonal réversible. Il résulte déjà de la représentation sphérique trouvée que les lignes de courbure sont toutes planes. Nous allons démontrer que de plus elles sont circulaires. Soit M un point quelconque par où passent trois surfaces orthogonales. Lorsque ρ varie seule, le trièdre des trois normales $Mxyz$ tourne autour d'un axe MT de direction invariable, situé dans le plan Myz, et subit en même temps un mouvement de translation dont la direction est constamment celle de Mx perpendiculaire à l'axe de rotation. Ces deux mouvements se composent en une simple rotation autour d'un axe parallèle au premier et situé aussi dans le plan Myz perpendiculaire à la translation. Donc le lieu des axes instantanés dans le trièdre

mobile est le plan Myz, et le mouvement résulte du roulement de ce plan sur un cylindre fixe. Le mouvement inverse est donc défini par le roulement de ce cylindre sur un plan fixe. Si le système est réversible, ce cylindre devrait être un plan, ce qui est impossible; le mouvement doit donc se faire autour d'un axe permanent et la trajectoire du point M est un cercle. Comme il en est évidemment de même dans la variation de ρ ou de ρ_2 *toutes les lignes de courbure du système sont des cercles*. La condition est manifestement suffisante. Les seules surfaces dont toutes les lignes de courbure sont circulaires sont les cyclides de Dupin ou les surfaces qui en dérivent par dégénérescence, telles que la sphère, le plan, les cônes et les cylindres de révolution, si l'on considère les droites comme des cercles de rayon infini. Donc, en laissant de côté les systèmes banaux, on peut conclure que : *tous les systèmes orthogonaux réversibles sont composés de cyclides*.

6. *Les cyclides, enveloppes de sphères*. — Avant d'expliquer comment on peut construire le système orthogonal, je crois utile de rappeler les principales propriétés des cyclides, quoique ces surfaces aient déjà été l'objet de nombreux travaux de la part de plusieurs géomètres. J'en ai fait, moi-même, autrefois une étude sommaire en les considérant comme enveloppe d'une sphère qui reste tangente à trois sphères fixes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin, août et octobre 1892). Ici, je me propose d'en faire dériver les principales propriétés du seul fait que toutes les lignes de courbure sont circulaires. D'abord, une pareille surface existe bien, car on en obtient une en faisant l'inversion d'un cône de révolution par rapport à un point quelconque de l'espace. Nous savons

déjà que la représentation sphérique des lignes de courbure se compose de cercles orthogonaux dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites conjuguées. Ces droites conjuguées peuvent couper leur perpendiculaire commune en deux points distincts, ou bien être tangentes au même point de la sphère. Mais il y a des remarques générales qui s'appliquent aux deux cas.

Le plan d'une ligne de courbure circulaire coupe la surface sous un angle constant. On peut donc faire passer par chaque cercle de courbure une sphère circonscrite à la surface. La surface est l'enveloppe de toutes celles de ces sphères qui passent par les lignes de courbure d'une même famille. Comme il y a deux familles de lignes de courbure, la cyclide est l'enveloppe commune de deux familles de sphères. Il en résulte que deux sphères appartenant à deux familles différentes sont tangentes au point de la cyclide par où passent les deux lignes de courbure correspondantes, et que chaque sphère d'une famille est tangente à toutes les sphères de l'autre. Il faut trois sphères pour définir une famille de sphères qui leur soient tangentes ; mais il faut de plus choisir parmi les centres de similitude de ces trois sphères, trois de ces centres en ligne droite, de manière que les points de contact de la sphère mobile avec deux des sphères fixes soient antihomologues par rapport à l'un des centres. Comme il y a quatre axes de similitude, il y a quatre familles de sphères tangentes à trois sphères données. Il faut se borner à l'une d'elles. Considérons comme positif un contact intérieur et comme négatif un contact extérieur. Si l'on envisage toutes les sphères tangentes à deux sphères fixes, les points de contact étant antihomologues par rapport au centre de similitude S, les deux

contacts seront de même espèce ou d'espèces différentes suivant que le point S sera le centre de similitude direct ou inverse. En d'autres termes le produit des deux contacts reste le même quand on ne change pas le centre de similitude. Donc, dans le cas de notre famille de sphères tangentes à trois sphères fixes, les produits des contacts deux à deux restent invariables, c'est-à-dire qu'un des contacts ne peut changer d'espèce sans que les deux autres en changent aussi. Finalement, *la cyclide est l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes, les trois contacts restant de même espèce, ou changeant d'espèce en même temps.*

7. *Points coniques, plans circonscrits, plans de symétrie.* — Les trois sphères fixes se coupent en deux points réels ou imaginaires qui sont les sphères de rayon nul de la première famille, et qui par conséquent doivent se trouver sur toutes les sphères de la deuxième famille, à laquelle appartiennent les trois sphères fixes. De plus, parmi les sphères de la première famille figurent deux plans réels ou imaginaires qui sont tangents aux trois sphères primitives. Toutes les sphères de la seconde famille doivent être tangentes à ces deux plans. Alors en considérant la surface comme l'enveloppe des sphères de la seconde famille, on voit que *la cyclide est l'enveloppe des sphères qui passent par deux points fixes et qui sont tangentes à un plan fixe.* Ces sphères sont par suite également tangentes au plan symétrique du premier par rapport au plan perpendiculaire à la droite des deux points fixes en son milieu.

Les caractéristiques de ces sphères sont des cercles de la cyclide qui passent par les deux points fixes et qui doivent toucher chacun des deux plans fixes sur

le cercle de la cyclide qui se trouve dans ce plan. Donc : *La cyclide est le lieu des cercles qui passent par deux points fixes et qui sont tangents à deux plans fixes symétriques par rapport au plan perpendiculaire à la droite des deux points fixes, en son milieu.* Il est bien entendu que, dans certains cas particuliers, les deux points fixes peuvent se confondre ainsi que les deux plans fixes.

Les points fixes sont des points coniques de la cyclide, les plans fixes des plans circonscrits. Comme chaque famille de sphères contient deux sphères de rayon nul et deux plans, la cyclide admet quatre points coniques et quatre plans circonscrits réels ou imaginaires, distincts ou confondus. Nous appellerons *axe radical d'une cyclide* chacune des droites qui joignent les deux points coniques d'une même famille. Parmi les sphères de l'autre famille qui passent toutes par ces deux points se trouvent les deux plans circonscrits de cette famille-là, d'où il suit que chacun des deux axes radicaux est la droite d'intersection des deux plans circonscrits d'une même famille. Ils sont perpendiculaires entre eux et parallèles aux deux droites fixes par où passent les plans des cercles de la représentation sphérique.

On en déduit immédiatement que la cyclide admet deux plans de symétrie dont chacun passe par l'un des axes radicaux et est perpendiculaire à l'autre au milieu de la distance des deux points coniques situés sur cet autre. Chacun de ces plans contient les centres de toutes les sphères qui passent par les points coniques qu'il ne contient pas.

8. *La cyclide est une surface anallagmatique. — Cône des tangentes au point conique. — Lieu des*

centres des sphères d'une même famille. — L'inversion transforme la cyclide en une autre cyclide puisque les lignes de courbure circulaires se transforment en d'autres cercles. Si le pôle d'inversion est sur l'un des axes radicaux, et le module convenablement choisi, toutes les sphères passant par les points coniques situés sur cet axe se transforment en elles-mêmes et la cyclide se reproduit. C'est une surface *anallagmatique*. Si le pôle d'inversion est à l'un des points coniques, toutes les sphères qui passent par ce point se transforment en des plans qui passent par le point transformé de l'autre point conique situé sur le même axe radical, et comme tous ces plans doivent être tangents à une sphère de l'autre famille, ils enveloppent un cône de révolution qui est la transformée de la cyclide. Ce cône devient un cylindre si les deux points coniques se confondent. De là résulte que : *le cône des tangentes en chaque point conique est de révolution*, puisque les cercles passant par les points coniques se sont transformés dans les génératrices du cône, lesquelles font un angle constant avec l'axe radical.

Cette proposition résulte aussi de ce fait que le cône circonscrit le long d'un cercle de courbure est de révolution. A la limite, ce cône devient le cône des tangentes. Il résulte encore de ce qui précède que toute cyclide est la figure inverse d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

Coupons une cyclide par un de ses plans de symétrie (P). Les sphères ayant leur centre dans ce plan sont coupées suivant des grands cercles (C). Considérons trois de ces grands cercles. Il existe dans le plan (P) deux cercles (ω) et (ω') tangents à ces trois-là avec les conditions de contact imposées. Ce sont les

grands cercles de deux sphères tangentes aux trois sphères ayant pour grands cercles les cercles (C) choisis. Elles font donc partie de la seconde famille et doivent être tangentes à toutes les sphères de la première famille. Donc tous les cercles (C) sont tangents aux cercles (ω) et (ω′) et le lieu de leur centre, c'est-à-dire le lieu des centres des sphères de la première famille, est une conique admettant pour foyers les centres des cercles (ω) et (ω′). On en déduit que :

La cyclide est l'enveloppe des sphères qui ont leur centre dans un plan fixe et qui sont tangentes à deux cercles fixes tracés dans ce plan, toujours avec les mêmes restrictions relatives à l'espèce des contacts. Il reste entendu que l'un des cercles peut se réduire à une droite ou à un point.

De plus, les deux coniques qui constituent chacune le lieu des centres des sphères d'une des deux familles, sont focales l'une de l'autre. En effet, chaque sphère S de l'une des familles touche toutes celles de l'autre famille en des points qui sont sur le cercle le long duquel la sphère (S) touche son enveloppe. Les droites qui joignent le centre de la sphère (S) aux centres de toutes les sphères de l'autre famille passent par les points de contact et forment un cône de révolution. Le lieu des centres de (S) est donc le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une conique, lieu des centres des sphères de l'autre famille, c'est-à-dire la focale de cette conique.

9. *Cyclide du quatrième ordre. Elle admet deux plans circonscrits réels et deux imaginaires.* — Reportons-nous à la représentation sphérique formée des cercles dont les plans passent par les droites (D″) et (E″) et supposons que ces deux droites coupent leur per-

pendiculaire commune en deux points distincts. Chaque plan circonscrit à la cyclide doit correspondre à un plan tangent à la sphère puisqu'en tous les points de contact les normales sont parallèles. Or des deux droites conjuguées (D'') et (E''), l'une coupe la sphère et l'autre lui est extérieure. Donc on peut mener à la sphère par ces droites deux plans tangents réels et deux autres imaginaires. D'autre part, si la direction d'un plan circonscrit est réelle, ce plan est aussi réel puisqu'il doit passer par l'un des axes radicaux de la surface, lesquels sont réels l'un et l'autre. Donc, parmi les quatre plans circonscrits à la cyclide, il y en a toujours deux réels et deux imaginaires.

10. *Différentes formes des cyclides du quatrième ordre.* — Nous pouvons maintenant passer en revue les différentes formes que peut affecter une cyclide.

D'abord, si l'une des droites (D'') ou (E'') est rejetée à l'infini, l'autre passe par le centre de la sphère, la représentation sphérique se compose de méridiens et de parallèles, et la surface est un *tore*.

Dans le cas général, soient (P) et (Q) les deux plans circonscrits réels qui se coupent suivant l'axe radical (R). L'autre axe radical (T) est perpendiculaire à (R). Supposons qu'il ne coupe pas (R). Il coupe (P) et (Q) en deux points A et B. Si les points coniques situés sur (T) sont A et B, la cyclide se réduit à la sphère tangente à (P) et à (Q) en A et en B. Si les points coniques étaient en dehors du segment AB, toutes les sphères tangentes à (P) et à (Q) seraient imaginaires, et la cyclide elle-même imaginaire. Supposons-les donc entre A et B. Le lieu des points de contact de (P) avec les sphères dont la cyclide est l'enveloppe est un cercle de centre A. Tant que le rayon ρ de ce cercle est suffisam-

ment petit, les sphères tangentes à (P) coupent la droite AB en deux points réels et la cyclide a la forme d'un tore à points coniques réels que l'on aurait déformé en le comprimant d'un côté. Quand le rayon ρ grandit, les points A et B se rapprochent, et avant que le cercle de rayon ρ soit devenu tangent à l'axe radical (R), ces deux points coniques se réunissent au milieu de AB. Alors la cyclide est l'analogue du tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

Le rayon ρ grandissant encore, mais restant plus petit que la distance de A à l'axe radical (R), les points coniques deviennent imaginaires et la cyclide a la forme d'un anneau plus épais d'un côté que de l'autre. Quand le cercle de centre A est devenu tangent à l'axe radical (R), la diminution de l'épaisseur de l'anneau est devenue telle qu'au point de contact cette épaisseur est réduite à zéro. La cyclide a la forme d'un fuseau à filer qu'on aurait courbé sur son axe jusqu'à ce que les deux pointes se rejoignent.

Si enfin le cercle de centre A coupe l'axe radical (R) les points coniques apparaissent dans la famille des sphères admettant cet axe radical, et la cyclide a la forme de deux fuseaux à filer recourbés l'un et l'autre de manière à se joindre par leurs pointes.

Il peut encore arriver que les deux axes radicaux se coupent en un point sur lequel viendront alors se confondre les points A et B. Le cercle de centre A est composé de deux parties égales séparées par l'axe radical (R) ; les deux fuseaux recourbés sont égaux, et la cyclide admet un troisième plan de symétrie qui est le plan des droites (R) et (T).

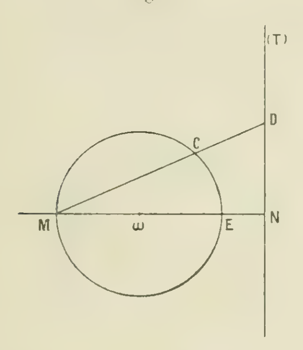
11. *Généralités sur les cyclides du troisième ordre.* — Les surfaces que nous venons d'étudier sont du

quatrième ordre, puisque les plans passant par un des axes radicaux les coupent suivant deux cercles. Examinons maintenant le cas où la représentation sphérique se compose de cercles dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites (D) et (E) rectangulaires et tangentes en un même point de la sphère. Alors les deux plans circonscrits d'une même famille se confondent comme les deux plans tangents à la sphère menés par la droite (D). Il y a dans chaque famille un plan circonscrit et ces deux plans sont parallèles. Les deux axes radicaux (R) et (T), respectivement parallèles à (D) et à (E), sont deux droites perpendiculaires entre elles et situées chacune dans l'un des plans circonscrits, par exemple (R) dans (P), et (T) dans (Q). Les sphères (S) coupent l'axe radical (R) en deux points A et B et sont tangentes au plan (Q). Le lieu de leurs points de contact est l'intersection de ce plan avec le plan perpendiculaire à (R) au milieu de AB. Parmi ces sphères il y en a deux de rayon nul dont les centres sont nécessairement sur le lieu des points de contact. Il en résulte que ce lieu n'est autre que l'axe radical (T). Ainsi chacun des deux plans circonscrits touche la cyclide le long d'un axe radical. Les plans de symétrie sont ceux qui passent par l'un des axes radicaux et qui sont perpendiculaires à l'autre.

Soit MN (*fig.* 1) la perpendiculaire commune aux deux axes radicaux, M sur (R) et N sur (T). Parmi toutes les sphères (Σ) admettant l'axe radical (T), il y en a une qui a son centre ω sur MN et qui passe en M où elle est tangente à (R). Elle coupe suivant un grand cercle le plan (V) passant par MN et par (T) que nous avons pris pour plan de la figure. Les sphères (S) sont alors celles qui ont leur centre dans le plan (V) et qui sont tangentes à la fois à la droite (T) et au cercle (ω),

le contact avec ce cercle restant de même espèce tant que la sphère reste d'un même côté du plan circonscrit passant par (T) et changeant d'espèce quand la sphère

Fig. 1.



passe de l'autre côté du plan. Elles doivent comprendre comme cas limite le plan perpendiculaire à (V) passant par (R). Le lieu de leurs centres est une parabole ayant pour foyer ω et pour directrice une parallèle à (T). Le lieu des centres des sphères de l'autre famille est la parabole focale de celle-là.

Soit une de ces sphères de la famille (S). Elle touche le cercle (ω) et la droite (T) en deux points C et D qui d'après une propriété élémentaire sont alignés sur le point M. La sphère considérée touche donc la cyclide suivant le cercle de diamètre CD situé dans le plan perpendiculaire à (V), plan qui contient bien, comme cela doit être, l'axe radical (R) dont le pied est en M. La cyclide est donc le lieu de ces cercles CD obtenus en faisant pivoter une droite autour de M. Les surfaces ainsi obtenues sont du troisième ordre. Chacune d'elles est complètement définie par une droite (T) et un cercle (ω) situé dans un même plan, avec l'indi-

cation de celle des deux extrémités du diamètre de (ω) perpendiculaire à (T) qui doit jouer le rôle de centre de pivotement.

12. *Différentes formes de cyclides du troisième ordre.* — Supposons d'abord que le cercle (ω) ne coupe pas la droite (T) et qu'on prenne pour centre de pivotement le point du cercle le plus éloigné de la droite (T) (*fig.* 1). La surface est alors tout entière comprise entre les deux plans circonscrits passant par M et N. Elle a la forme d'une sorte de double trompe ayant sa partie la plus étroite le long du cercle de diamètre EN compris dans le plan perpendiculaire à (T) entre (ω) et (T), et s'évasant des deux côtés indéfiniment. On peut encore la considérer comme engendrée par les cercles de l'autre famille qui sont dans les plans passant par (T). Le point M sera remplacé par N, le cercle (ω) par le cercle de diamètre EN dans le plan perpendiculaire à (V) et la droite (T) par la droite (R). On lui trouve ainsi la forme d'une double trompe ayant sa partie la plus étroite le long du cercle (ω) et s'évasant indéfiniment de chaque côté du plan (V). Cette surface contient les deux droites (T) et (R).

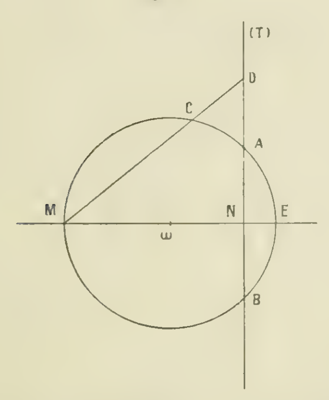
Si le cercle (ω) est tangent à la droite (T), la double trompe se rétrécit dans sa partie la plus étroite jusqu'à présenter un point conique au point N. Mais si l'on considère les cercles de la même famille que (ω), on verra qu'ils sont tous tangents à la droite (T) au point N. Le cône des tangentes au point conique se réduit à cette droite. Ce cas est le même que celui où le cercle (ω) se réduirait à un point.

Si le cercle (ω) coupe la droite (T) en deux points A et B (*fig.* 2), la surface comprendra deux trompes partant des points coniques A et B et une sorte de fuseau

recourbé à l'intérieur de la sphère (ω) de l'autre côté de (T).

Supposons maintenant que le cercle (ω) ne coupant pas la droite (T), on ait pris pour pied de la droite (R)

Fig. 2.



le point le plus rapproché de (T), soit E (*fig.* 1). Alors si l'on considère les cercles de l'autre famille, il faudra remplacer le cercle (ω) par le cercle de diamètre MN dans le plan perpendiculaire à (V). Comme celui-ci coupe l'axe radical (R) dont le pied est en E, la cyclide aura la forme du cas précédent, et la discusssion est épuisée.

Enfin, si les deux plans circonscrits se confondent, la cyclide se réduit à une sphère accompagnée du plan des deux axes radicaux, comme on le voit sur la figure 2 en rapprochant indéfiniment le point M du point N.

13. *Sections planes des cyclides.* — Il convient d'ajouter quelques mots sur les sections planes des cyclides. Toutes les sphères d'une même famille étant cir-

conscrites à la surface coupent le plan sécant (P) suivant des cercles tangents à la section plane. Ces courbes sont donc l'enveloppe commune de deux familles de cercles. Soit A le point où l'un des axes radicaux de la cyclide coupe le plan sécant (P). Ce point a la même puissance par rapport à tous les cercles correspondants situés dans le plan (P). Si l'on prend ce point A pour pôle d'inversion avec sa puissance pour module, les cercles demeureront inaltérés, et leur enveloppe ne sera pas changée. Comme il y a deux axes radicaux, les sections planes des cyclides sont des courbes doublement anallagmatiques.

La cyclide étant un lieu de cercles contient le cercle de l'infini. Dans les cyclides du quatrième ordre ce cercle est une ligne double de la surface parce que chaque plan passant par l'un des axes radicaux contient deux cercles de courbure qui se coupent aux deux points cycliques de ce plan. Donc toutes les sections planes admettent pour points doubles les points cycliques du plan sécant. Dans les cyclides du troisième ordre, le cercle de l'infini est une ligne simple de la surface puisque chaque plan passant par l'un des axes radicaux ne contient qu'un cercle de courbure ; mais le plan de l'infini coupe en plus la surface suivant une droite située dans les plans parallèles aux plans circonscrits. Donc la section faite par le plan (P) admet pour asymptotes deux droites isotropes du plan (P) et une parallèle à l'intersection de (P) avec l'un des plans circonscrits. Les points A et B, où le plan sécant coupe les deux axes radicaux, font partie de la section ; en ces points la tangente est située dans le plan circonscrit correspondant, et par suite parallèle à l'asymptote.

Revenons au cas général : si le plan sécant est tan-

gent en M à la surface, le point M est un point double de l'intersection qui présente ainsi avec les points cycliques trois points doubles. La section est donc unicursale. Cette conclusion subsiste dans le cas des cyclides du troisième ordre. Si enfin le plan est bitangent à la cyclide, on trouve quatre points doubles sur la section. Celle-ci doit donc se décomposer en deux coniques qui sont forcément des cercles puisqu'elles passent l'une et l'autre par les points cycliques. Enfin, l'inversion montre que de même toute sphère bitangente à une cyclide la coupe suivant deux cercles. Le reste de l'intersection est le cercle de l'infini compté comme ligne double. En particulier, toute sphère passant par les deux points coniques coupe la cyclide suivant deux cercles.

En ce qui concerne les cyclides du troisième ordre, remarquons que les plans parallèles aux plans circonscrits coupent la surface suivant une droite à l'infini et une conique; celle-ci, quand elle est réelle, est toujours une hyperbole si la cyclide n'a pas de points coniques réels (*fig.* 1). Si les points coniques sont réels, la section est une hyperbole si le plan sécant passe entre M et N (*fig.* 2), une ellipse si le plan sécant est de l'autre côté de la droite (T). Si le plan sécant passe par le point E, le centre de la conique étant justement le point E, celle-ci se réduit à deux droites qui sont réelles dans le cas de la figure 1 et imaginaires dans le cas de la figure 2. Nous allons voir qu'en dehors des axes radicaux, des droites isotropes et de la droite de l'infini dans le plan parallèle aux deux axes radicaux, ces deux droites sont les seules qui se trouvent sur la surface. Si en effet la cyclide contient une droite (D) elle contiendra aussi la droite (D') symétrique de (D) par rapport au plan (V) de la figure 1. Alors le plan (W)

des deux droites (D) et (D′) coupera la cyclide suivant une troisième droite qui devra contenir les points cycliques du plan (W). Ce sera donc la droite de l'infini. Mais la surface ne contient pas d'autre droite à l'infini que celle qui est dans le plan parallèle aux deux axes radicaux. Donc le plan (W) est parallèle à ces deux axes radicaux, et les deux droites (D) et (D′) sont bien celles dont nous venons de parler. Les plans bitangents à la cyclide sont ceux qui passent par l'une ou l'autre de ces droites. Ils coupent la cyclide suivant un cercle en outre de cette droite. Enfin une sphère bitangente coupe la cyclide suivant deux cercles ; le reste de l'intersection est le cercle de l'infini.

14. *Le système orthogonal. — Symétrie par rapport à trois plans rectangulaires.* — Arrivons maintenant à la construction du système triplement orthogonal réversible. Je ne m'occuperai que des systèmes réels. Considérons d'abord les systèmes composés de cyclides du quatrième ordre, c'est-à-dire ceux qui correspondent au cas général de la représentation sphérique. Nous savons déjà par les propriétés de cette représentation sphérique que chaque cyclide du système a ses deux axes radicaux parallèles à deux des axes de coordonnées et par conséquent ses deux plans de symétrie parallèles à deux plans de coordonnées.

Soient (X) l'un des plans de symétrie d'une cyclide et (C) un des cercles de courbure de cette cyclide dont le plan perpendiculaire à (X) peut n'être supposé parallèle à aucun plan de coordonnées. Par (C) passe une cyclide de la deuxième famille dont un des plans de symétrie doit passer par l'axe du cercle (C), axe situé dans le plan (X). Par hypothèse, cet axe n'est parallèle à aucun plan de coordonnées autre que celui qui est

parallèle à (X). Donc le plan de symétrie de la seconde cyclide est aussi (X). Il en sera de même pour toutes les autres cyclides de la seconde famille.

On verra de même que le deuxième plan de symétrie de la première cyclide sera aussi un plan de symétrie commun à toutes les cyclides de la troisième famille. On en déduit aisément que :

Les plans de symétrie de toutes les cyclides se réduisent à trois plans rectangulaires. Toutes les cyclides d'une même famille sont symétriques par rapport à deux de ces trois plans fixes. Chacun de ces trois plans est un plan de symétrie commun à toutes les cyclides de deux familles.

Prenons ces trois plans pour plans de coordonnées. Puisqu'il existe deux familles de surfaces symétriques par rapport au plan OXY, l'ensemble de tout le système doit être symétrique par rapport à ce plan et comme les surfaces de la troisième famille ne l'admettent pas pour plan de symétrie, il faut que ces surfaces soient deux à deux symétriques par rapport à ce plan-là.

15. *Les douze tores dont six réels et six imaginaires.* — La représentation sphérique de l'une des cyclides se compose des cercles dont les plans passent par les deux droites rectangulaire (D'') et (E''). Si l'une de ces droites est rejetée à l'infini, la cyclide correspondante est un tore. A chaque position des droites (D'') et (E'') correspondent deux cyclides égales et symétriques par rapport au plan OXY ; comme chacune des deux droites (D'') et (E'') peut être rejetée à l'infini, chaque famille comprend quatre tores deux à deux sy-

métriques par rapport à l'un des plans de coordonnées. Nous allons voir que de ces quatre tores, deux sont réels et deux imaginaires.

Considérons une cyclide symétrique par rapport au plan OXY et supposons que celui des deux axes radicaux (R) par où passent les deux plans circonscrits réels soit dans ce plan OXY et parallèle à OY. Ces deux plans touchent la cyclide suivant des cercles par chacun desquels passe une cyclide de la deuxième famille. Mais cette deuxième cyclide doit être normale au plan (P) circonscrit à la première. Donc la sphère qui passe par le cercle situé dans le plan (P), et qui est circonscrite à la deuxième cyclide doit avoir son centre dans le plan (P), et le cercle considéré est un grand cercle de cette sphère. Or, si l'on se reporte à la génération des cyclides expliquée aux n°s 7 et 8, on verra que pour qu'une sphère touche la cyclide suivant un grand cercle, il faut que le plan de ce grand cercle soit un plan de symétrie de la cyclide. Donc le plan (P) est un plan de symétrie de la deuxième cyclide, et comme il n'est parallèle à aucun des plans de coordonnées, il faut que cette deuxième cyclide soit un tore engendré par la rotation du cercle situé dans le plan (P) autour d'une droite située dans le même plan et parallèle à l'un des axes de coordonnées, c'est-à-dire autour d'une droite parallèle à (R), parallèle elle-même à OY. De plus, cet axe du tore devant se trouver dans un des plans de coordonnées sera l'intersection du plan circonscrit (P) avec le plan OYZ. L'autre plan circonscrit (Q) donne naissance à un deuxième tore symétrique du premier par rapport au plan OXY.

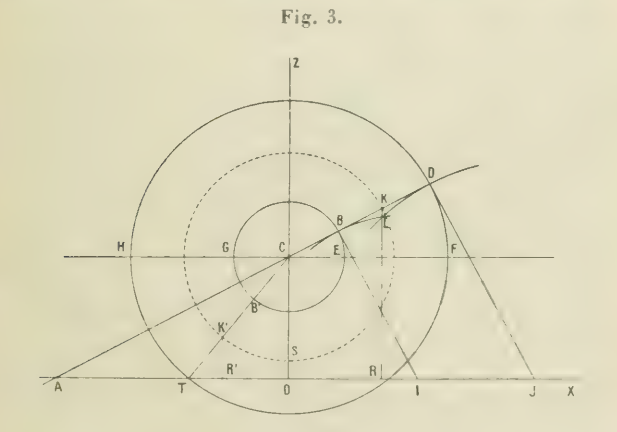
Ainsi, *le lieu des cercles de contact des plans circonscrits aux cyclides d'une même famille se compose de deux tores symétriques dont ces cercles sont*

les méridiennes, d'où il suit que tous ces cercles sont égaux.

Les plans circonscrits imaginaires à la première cyclide donneront naissance de la même manière à deux tores imaginaires appartenant à la troisième famille de cyclides, d'où il résulte bien que chaque famille de cyclides admet deux tores réels et deux imaginaires.

16. *Construction du système orthogonal.* — Dès lors, la construction du système orthogonal ne présente plus aucune difficulté. Considérons deux tores égaux ayant leurs centres C et C' sur l'axe OZ, leurs axes parallèles à OY, et symétriques par rapport à l'origine. Joignons C et C' à un point A de l'axe OX. Faisons passer par A une parallèle (R) à l'axe OY et considérons les deux plans (P) et (P') passant par (R) et C et C', lesquels coupent les tores suivant les cercles BD et B' D'. Une cyclide de la seconde famille sera l'enve-

Fig. 3.



loppe des sphères touchant les deux plans P et P' sur les cercles BD et B'D' (*fig.* 3, où l'on n'a représenté

qu'un seul des deux tores projeté sur le plan OXZ). La seconde famille est formée de toutes les cyclides qu'on obtient de cette manière en faisant faire un tour complet au rayon CBD. Parmi elles figurent les deux tores qu'on obtient en rejetant A à l'infini. Ceux-ci sont symétriques par rapport au plan OZY et admettent pour cercles stationnaires les deux cercles de diamètre EF et E'F' ou bien GH, G'H', dont les plans sont parallèles au plan OXY.

Le troisième couple de tores s'obtient en faisant tourner chacun des cercles stationnaires du premier tore autour de la trace de son plan sur le plan OXY, trace qui est parallèle à OX, et les deux autres familles de cyclides dérivent de ces deux couples de tores comme la seconde famille dérivait des deux tores primitifs.

17. *Le système ainsi défini est bien orthogonal.* Il reste à vérifier que les cyclides ainsi obtenues se coupent bien à angle droit.

La cyclide considérée d'abord et admettant pour plan de symétrie les plans OXZ et OXY coupait, suivant le cercle BD, le tore (C) dont l'axe est parallèle à OY. Menons dans le plan OXZ les tangentes en B et en D aux cercles de rayons CB et CD, lesquelles coupent l'axe OX respectivement en I et en J, et de ces deux points comme centres, traçons les cercles de rayon IB et JD. Ils appartiennent à la cyclide considérée et se coupent en deux points L et L' qui sont deux points coniques de cette cyclide. Par cette droite LL' passe un plan parallèle à OYZ qui coupe la cyclide suivant deux cercles (S) et (S'). Chacun de ces cercles coupe à angle droit le cercle BD en un point qui se projette au milieu K de BD et qui est par conséquent sur le cercle

stationnaire du tore (C). De plus, les points de rencontre du cercle (S) avec les cercles BD et B'D' sont les extrémités d'un diamètre de (S) puisqu'en ces points les tangentes à (S) situées dans les plans (P) et (Q) sont parallèles à OY. Donc le cercle (S) qui a pour axe la parallèle à OX située à l'intersection du plan OXY avec le plan stationnaire du tore (C) est un parallèle du tore ayant pour axe cette même parallèle à OX, tore appartenant à la troisième famille.

De plus, la cyclide coupe ce tore à angle droit. En effet, l'angle des deux surfaces est le même tout le long du cercle d'intersection qui est une ligne de courbure commune et, au point qui se projette en K, le plan tangent à la cyclide est le plan (P) qui est bien normal au deuxième tore, puisqu'il est normal au cercle stationnaire du premier, lequel est une méridienne du second.

De même, le cercle (S') est un parallèle du deuxième tore de la troisième famille.

Il résulte de là que chacune des cyclides définie comme il a été expliqué, coupe orthogonalement chacun des tores d'une famille à laquelle elle n'appartient pas suivant une méridienne, et chacun des tores de la troisième famille suivant un parallèle. Soient maintenant deux cyclides appartenant à deux familles différentes. Elles couperont l'un des tores de la troisième famille, l'une suivant une méridienne, l'autre suivant un parallèle. Au point M où se coupent les deux cercles, les trois surfaces sont orthogonales puisque chacune des cyclides coupe le tore à angle droit et que les deux courbes d'intersection sont elles-mêmes rectangulaires.

Il reste à prouver qu'elles se coupent suivant un cercle.

Pour fixer les idées, supposons que le tore ait son

axe parallèle à OY et son centre sur OZ, comme dans la figure 3. Il admet pour plans de symétrie les plans OYZ et OZX et appartient à la famille dont les axes radicaux sont parallèles à OY et à OX. La cyclide qui le coupe suivant une méridienne a l'un de ses axes radicaux parallèles à OY et situé dans le plan OXY, et l'autre parallèle à OZ et situé dans le plan OYZ. La cyclide qui le coupe suivant un parallèle est symétrique par rapport aux plans OYZ et OXY. L'un de ses axes radicaux est parallèle à OX et situé dans le plan OXY, l'autre parallèle à OZ et situé dans le plan OXZ. La première cyclide coupe le tore suivant un cercle dont le plan passe par l'axe radical parallèle à OX (projeté en A sur la figure 3). Donc le second cercle de la cyclide passant par le point M est dans un plan qui contient l'axe radical parallèle à OZ. Son centre est donc dans le plan OXY. De même l'autre cyclide coupe le tore suivant un parallèle dont le plan parallèle à OXZ coupe le plan OXY suivant une parallèle à OX qui est l'un des axes radicaux de la cyclide. Donc le second cercle de cette cyclide passant en M est dans un plan qui contient l'axe radical parallèle à OZ. Son centre est donc aussi dans le plan OXY. Ainsi les deux cercles doivent être tangents à la normale en M au tore, situés dans le plan parallèle à OZ passant par cette normale et enfin avoir leurs centres dans le plan OXY. Donc ils coïncident et les deux cyclides se coupent suivant un cercle qui est une ligne de courbure commune aux deux surfaces. Comme celles-ci sont orthogonales au point M, elles le sont tout le long du cercle d'intersection.

18. *Lieu des points doubles. — Sections par les plans de coordonnées.* — L'ensemble de tout le sys-

tème est symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées, car les cyclides d'une même famille sont symétriques chacune par rapport à deux de ces plans et deux à deux par rapport au troisième. Parmi toutes les cyclides d'une même famille figure le plan par rapport auquel elles sont symétriques deux à deux. Par exemple, sur la figure 3, la cyclide définie par le cercle BD se réduit au plan OYZ si le rayon OBD vient coïncider avec l'axe OZ.

Une cyclide symétrique par rapport au plan OXY coupe ce plan suivant deux cercles qui se coupent en deux points G et G′ qui sont des points coniques de cette cyclide. Par chacun de ces cercles doit passer une cyclide de la deuxième famille, mais celle-là est justement réduite au plan OXY. Les points G et G′ sont des cercles de rayon nul de la famille de lignes de courbure autre que celle des deux cercles précédents. Ils doivent donc être aussi des cercles de rayon nuls de la troisième famille de cyclides, d'où il suit que les deux familles de cyclides symétriques par rapport au même plan de coordonnées ont dans ce plan-là le même lieu de leurs points coniques. D'autre part une cyclide de la deuxième famille doit couper la première cyclide considérée suivant un cercle appartenant à la même famille que les deux cercles situés dans le plan OXY; mais tous ces cercles passent par les points G et G′. Donc toutes les cyclides de la deuxième famille passent par les points G et G′ et par conséquent par le lieu des points coniques de toutes les cyclides des deux autres familles. Réciproquement tout point de l'intersection de l'une des cyclides de la deuxième famille avec le plan OXY se trouve sur un cercle de courbure commun à cette cyclide et à l'une de celles de la première famille, c'est donc l'un des

points G ou G′ par où passent tous les cercles de la famille considérée sur la cyclide de la première famille.

Donc : *Toutes les cyclides d'une même famille coupent le plan de coordonnées par rapport auquel elles ne sont pas symétriques suivant une même courbe qui est le lieu des points coniques des cyclides des deux autres familles situés dans ce plan-là*.

Il existe trois de ces courbes, une dans chacun des plans de coordonnées. Comme chaque famille comprend deux tores, ces courbes font partie des courbes du quatrième ordre relativement simples qui résultent de la section d'un tore par un plan parallèle à l'axe; elles sont symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées situées dans leur plan.

M. Darboux a fait remarquer que chacune de ces courbes est une focale des deux autres parce que tout point conique d'une cyclide étant une sphère de rayon nul circonscrite à la cyclide est un foyer de toute section plane de cette surface. (*A suivre.*)

[D2aα]

SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE DANS LES SÉRIES À TERMES POSITIFS;

Par M. Paul MONTEL.

---

1. Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs; on appelle *critères de convergence de première espèce* ceux qui ne font intervenir qu'un seul

terme de la série : c'est le cas du critère de Cauchy relatif à

$$\sqrt[n]{u_n}.$$

On appelle *critères de seconde espèce* ceux qui font intervenir deux termes : c'est le cas du critère de d'Alembert relatif à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Un raisonnement classique montre que les suites

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ne peuvent avoir des limites inégales. La méthode consiste à introduire la série entière

$$v_n = u_n x^n,$$

et à donner à x une valeur comprise entre $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$, λ et μ désignant respectivement les limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de $\sqrt[n]{u_n}$. Si l'on suppose, par exemple, $\lambda < \mu$, on aura

$$\frac{1}{\lambda} > x > \frac{1}{\mu},$$

et le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ aurait une limite λx inférieure à l'unité, tandis que $\sqrt[n]{v_n}$ aurait une limite μx supérieure à l'unité. Les résultats demeurent les mêmes si l'un des nombres λ ou μ est nul ou infini.

En serrant d'un peu plus près ce même raisonnement, on peut établir d'autres propositions, plus précises, concernant les limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$.

Démontrons tout d'abord un théorème dû à Cauchy [1] :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a pour limite* λ, $\sqrt[n]{u_n}$ *a la même limite* λ.

Supposons d'abord que λ ne soit ni nul ni infini; si $\sqrt[n]{u_n}$ n'avait pas pour limite λ, il existerait un nombre ε tel que, pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité

$$|\sqrt[n]{u_n} - \lambda| > \varepsilon$$

fût vérifiée. En d'autres termes, pour une infinité de valeurs de n, l'une au moins des inégalités

$$\sqrt[n]{u_n} > \lambda + \varepsilon, \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{u_n} < \lambda - \varepsilon \tag{2}$$

serait vérifiée : je dis que l'une et l'autre hypothèse sont impossibles. Posons $\lambda + \varepsilon = \lambda_1$, $\lambda - \varepsilon = \lambda_2$; on peut prendre ε assez petit pour que λ_2 soit positif.

Supposons que l'inégalité (1) soit satisfaite pour une infinité de valeurs de n et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda} > x > \frac{1}{\lambda_1}.$$

Considérons de nouveau la série $v_n = u_n x^n$; le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a pour limite $\lambda x < 1$, donc la série v_n est convergente; d'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{v_n} > \lambda_1 x > 1,$$

ce qui montre que le terme général v_n ne pourrait

---

[1] CAUCHY, *Analyse algébrique*, p. 59; *Œuvres*, 2e série, t. III, p. 63.

tendre vers zéro. La première hypothèse est donc à rejeter.

Supposons, en second lieu, que l'inégalité (2) soit satisfaite pour une infinité de valeurs de n et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda_2} > x > \frac{1}{\lambda}.$$

Dans la série v_n, le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a pour limite $\lambda x > 1$; donc, à partir d'un certain rang, ce rapport est supérieur à 1 et les termes vont en croissant.

D'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{v_n} < \lambda_2 x < 1,$$
$$v_n < (\lambda_2 x)^n,$$

et, puisque $(\lambda_2 x)^n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il y aurait dans la série une infinité de termes aussi petits qu'on voudrait, ce qui est impossible. La seconde hypothèse est donc, elle aussi, inadmissible.

Si λ est nul, il suffit de supprimer λ_2 dans le raisonnement précédent; si λ est infini, il suffit de supprimer λ_1 et d'appeler λ_2 un nombre fini quelconque.

2. On peut obtenir un résultat plus complet en introduisant la notion de *plus grande des limites* et de *plus petite des limites* d'une suite infinie. Rappelons les définitions de ces nombres, soit

$$(3) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

une suite infinie de nombres; un nombre A sera dit une limite de la suite (3), si l'on peut extraire de cette suite une suite partielle ayant pour limite A. Le plus grand des nombres A est appelé la plus grande des

limites L de la suite (3) : ce nombre peut être $+\infty$; le plus petit des nombres Λ est appelé la plus petite des limites de la suite (3) : ce nombre peut être $-\infty$.

Le nombre L possède les propriétés caractéristiques suivantes :

1° Il n'y a qu'un nombre fini de nombres a_n supérieurs à $L+\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

2° Il y a une infinité de nombres a_n supérieurs à $L-\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

La plus petite des limites est définie par des propriétés analogues. Si l'on suppose que les nombres a_n sont les abscisses des points d'une droite, la plus grande des limites sera l'abscisse du point limite le plus à droite, la plus petite des limites sera l'abscisse du point limite le plus à gauche. Nous appellerons aussi ces points la plus grande et la plus petite des limites des points a_n.

Soient λ' et λ'', respectivement, la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; μ' et μ'', la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{u_n}$, on peut énoncer la proposition suivante :

Le segment $\lambda'\lambda''$ contient le segment $\mu'\mu''$.

On a, nécessairement (*fig.* 1),

$$\lambda' < \lambda'', \quad \mu' < \mu''.$$

Il suffit donc de démontrer que

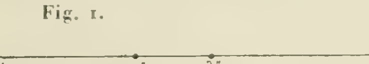
$$\mu'' \leqq \lambda'' \tag{4}$$

et

$$\lambda' \leqq \mu'. \tag{5}$$

Pour démontrer l'inégalité (4), nous pouvons d'abord

Fig. 1.



admettre que λ'' est fini, sinon le résultat serait évident. Supposons que l'on ait

$$\lambda'' < \mu'';$$

nous nous servirons toujours du même procédé de démonstration : soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\lambda''} > x > \frac{1}{\mu''},$$

et considérons la série $v_n = u_n x^n$. Puisque λ'' est la plus grande des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, quelque petit que soit le nombre positif ε, on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda'' + \varepsilon$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < (\lambda'' + \varepsilon)x;$$

or, $\lambda'' x$ étant inférieur à 1, on peut prendre ε assez petit pour que

$$(\lambda'' + \varepsilon)x < 1,$$

et la série v_n est convergente.

D'autre part, μ'' étant la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{u_n}$, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$\sqrt[n]{u_n} > \mu'' - \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε et, par suite,

$$\sqrt[n]{v_n} > (\mu'' - \varepsilon)x;$$

or, $\mu'' x$ étant supérieur à 1, on peut prendre ε assez petit pour que

$$(\mu'' - \varepsilon) x > 1,$$

et la série v_n posséderait une infinité de termes supérieurs à 1, ce qui est impossible. Donc $\mu'' \leqq \lambda''$.

Le raisonnement qui précède suppose que λ'' n'est pas nul; mais, si $\lambda'' = 0$, on a $\lambda' = \lambda'' = 0$ et l'on retombe dans le cas examiné au paragraphe précédent.

Passons à l'inégalité (5); on peut admettre que λ' n'est pas nul, sinon le résultat serait évident; on peut admettre aussi que λ' n'est pas infini, sinon λ'' étant aussi infini, on retomberait dans l'un des cas particuliers examinés précédemment. λ' étant un nombre fini non nul, supposons que l'on ait

$$\mu' < \lambda'$$

et soit x un nombre vérifiant les inégalités

$$\frac{1}{\mu'} > x > \frac{1}{\lambda'};$$

λ' étant la plus petite des limites de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on a, à partir d'un certain rang, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \lambda' - \varepsilon$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > (\lambda' - \varepsilon) x.$$

Prenons ε assez petit pour que

$$(\lambda' - \varepsilon) x > 1,$$

ce qui est possible puisque $\lambda' x > 1$; à partir d'un certain rang on aura $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et les termes de la série v_n

iront en croissant. D'autre part, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{u_n} < \mu' + \varepsilon$$

et

$$\sqrt[n]{v_n} < (\mu' + \varepsilon)x ;$$

si l'on prend ε assez petit pour que

$$k = (\mu' + \varepsilon)x < 1 ;$$

on voit qu'il y a dans la série v_n une infinité de termes inférieurs à k^n et, par suite, aussi petits qu'on le veut, ce qui contredit notre affirmation que les termes vont en croissant à partir d'un certain rang.

Le théorème est donc démontré : en particulier, si le segment $\lambda'\lambda''$ se réduit à zéro, il en est de même du segment $\mu'\mu''$. Mais ce dernier peut se réduire à zéro sans qu'il en soit de même du premier; en d'autres termes, $\sqrt[n]{u_n}$ peut avoir une limite unique, sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ possède la même propriété.

3. J'ai voulu montrer comment l'introduction de la série $u_n x^n$ permet d'arriver à des résultats très précis, mais on peut établir le théorème précédent d'une manière directe qui en fait apparaître l'énoncé comme plus naturel [1]. Nous allons voir que ce théorème résulte en définitive de ce fait que les moyennes arithmétiques des n premiers termes d'une suite infinie ont leurs valeurs limites toujours comprises entre la plus grande et la plus petite des limites de cette suite.

Soit

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

---

[1] Il est aussi bien facile de démontrer cette proposition en modifiant un peu le raisonnement même de Cauchy.

une suite infinie admettant pour plus grande des limites λ'' et pour plus petite des limites λ'. Nous supposerons, pour abréger, qu'aucune de ces limites n'est infinie; formons la suite des nombres

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

je dis que toutes les limites des b_n sont comprises entre λ' et λ''. On a, en effet, à partir d'un certain rang p,

$$\lambda' - \varepsilon < a_n < \lambda'' + \varepsilon,$$

lorsque ε est un nombre positif donné arbitrairement petit. Prenons $n > p$, on a

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{n} + \frac{a_{p+1} + \ldots + a_n}{n};$$

la seconde fraction est inférieure à

$$\lambda'' + \frac{n-p}{n}\varepsilon < \lambda'' + \varepsilon,$$

et supérieure à

$$\lambda' - \frac{n-p}{n}\varepsilon > \lambda' - \varepsilon.$$

p étant fixe, prenons n assez grand pour que

$$-\varepsilon < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{n} < +\varepsilon;$$

on aura à partir de cette valeur de n,

$$\lambda' - 2\varepsilon < b_n < \lambda'' + 2\varepsilon,$$

et puisque ε est arbitrairement petit, la proposition est démontrée.

Si l'on pose

$$a_n = \mathrm{L}\,\mathrm{A}_n,$$

on aura

$$b_n = \mathrm{L}\sqrt[n]{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n};$$

on en déduit que le résultat précédent s'applique aux moyennes géométriques.

Pour établir le théorème que nous avons en vue, il suffit de remarquer que $\sqrt[n]{u_n}$ est la moyenne géométrique des nombres $u_1, \frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_1, \frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

4. On peut, en se plaçant au même point de vue, comparer d'autres critères de convergence de première et de seconde espèce [1].

Les règles $\sqrt[n]{u_n}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ résultent de la comparaison de la série u_n à une progression géométrique ; en comparant la série u_n à la série $\frac{1}{n^\alpha}$, on obtient le premier critère de Bertrand et la règle de Raabe-Duhamel.

Le premier critère de Bertrand conduit à étudier la suite

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{L}\,\frac{1}{u_n}}{\mathrm{L}\,n};$$

la règle de Raabe-Duhamel à étudier la suite

$$(7)\qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Nous nous plaçons, bien entendu, dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de même que $\sqrt[n]{u_n}$, ont pour limite l'unité.

---

[1] Je dois cette indication à M. R. Bricard.

Nous introduirons dans ce qui va suivre, au lieu des moyennes arithmétiques des termes d'une suite a_n, des valeurs moyennes plus générales; nous prendrons

$$b_n = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n},$$

les α_i étant positifs et la série $\Sigma\alpha_n$ étant divergente. Le résultat établi au paragraphe 3 subsistera; par une démonstration toute semblable, on montrera que la plus grande des limites μ'' de la suite b_n et la plus petite des limites μ' de cette suite déterminent un segment intérieur au segment $\lambda'\lambda''$ dont les extrémités sont la plus petite et la plus grande des limites de la suite a_n. Et rien ne sera modifié si l'on remplace la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

par un infiniment grand équivalent.

Or, $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$, étant un infiniment petit équivalent à $L\,\frac{u_n}{u_{n+1}}$, les limites de la suite (7) sont les mêmes que celles de la suite

$$n\,L\,\frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Prenons $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et

$$b_n = \frac{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}}{L\,n},$$

puisque $L\,n$ est équivalent à

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

si

$$a_1 = L\,\frac{1}{u_1}, \qquad \ldots, \qquad a_n = n\,L\,\frac{u_{n-1}}{u_n},$$

on aura

$$b_n = \frac{L \frac{1}{u_n}}{L n}.$$

Par conséquent, les limites de la suite de Bertrand sont comprises entre la plus grande et la plus petite des limites de la suite de Raabe-Duhamel. En particulier, si $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *a une limite unique,* $\frac{L \frac{1}{u_n}}{L n}$ *a la même limite.*

5. A chaque critère de Bertrand, on peut faire correspondre un critère de seconde espèce, comme l'a montré M. Borel (1).

Nous allons retrouver ce résultat et démontrer en même temps le théorème suivant :

Soient μ' μ'' *les plus petite et plus grande des limites fournies par le* $p^{\text{ième}}$ *critère de Bertrand,* λ' *et* λ'' *les plus petite et plus grande des limites fournies par le critère de seconde espèce correspondant : le segment* $\mu'\mu''$ *est intérieur au segment* $\lambda'\lambda''$. *En particulier, si le critère de seconde espèce donne une limite unique, le critère de première espèce correspondant donnera la même limite.*

Posons

$$L_1 x = L x, \qquad L_p x = L L_{p-1} x$$

et

$$\lambda_p(x) = x \, L_1 x \, L_2 x \ldots L_p x, \qquad \lambda_0(x) = x, \qquad \lambda_{-1}(x) = 1.$$

le $(p+2)^{\text{ième}}$ critère de Bertrand conduit à étudier les

(1) E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 6.

limites de la suite

$$(8) \qquad b_n = \frac{\mathrm{L}\dfrac{1}{\lambda_p(n)\,u_n}}{\mathrm{L}_{p+2}(n)}.$$

Posons $\alpha_n = \dfrac{1}{\lambda_{p+1}(n)}$; la série α_n est divergente et la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

est un infiniment grand équivalent à

$$\mathrm{L}_{p+2}(n).$$

Si l'on écrit

$$b_n = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n}{\mathrm{L}_{p+2}(n)},$$

on aura

$$\alpha_n a_n = b_n \mathrm{L}_{p+2}(n) - b_{n-1}\mathrm{L}_{p+2}(n-1) = \mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n-1)u_{n-1}}{\lambda_p(n)u_n};$$

on est donc conduit au critère de seconde espèce fourni par la suite

$$(9) \qquad a_n = \lambda_{p+1}(n)\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n-1)u_{n-1}}{\lambda_p(n)u_n},$$

ou par la suite équivalente [1]

$$\lambda_{p+1}(n)\,\mathrm{L}\,\frac{\lambda_p(n)u_n}{\lambda_p(n+1)u_{n+1}};$$

on peut remplacer le logarithme par l'infiniment petit équivalent

$$\frac{\lambda_p(n)u_n}{\lambda_p(n+1)u_{n+1}} - 1 = \frac{\lambda_p(n)}{\lambda_p(n+1)}\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}\right],$$

ou encore par

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}.$$

---

[1] Nous disons que deux suites sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes valeurs limites.

Nous sommes finalement conduits à étudier les limites de la suite

$$\lambda_{p+1}(n)\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)}\right].$$

Or, on a [1]

$$\frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_1(n)} + \ldots + \frac{1}{\lambda_p(n)} + \frac{\theta}{n^2},$$

θ restant fini quel que soit n ; comme $\frac{\lambda_{p+1}(n)}{n^2}$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{n}$, on peut remplacer la suite précédente par la suite

$$(10) \quad \lambda_{p+1}(n)\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \ldots - \frac{1}{\lambda_p(n)}\right].$$

Nous retrouvons le critère de seconde espèce sous la forme habituelle. Or, la suite (10) est équivalente à la suite (9) et la suite (8) est une suite de moyennes relatives à la suite (9) : notre proposition est donc établie.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Grenoble.

Composition. — *On donne les équations*

$$x = \left(z + e^{\frac{\alpha^2}{2}}\right)\cos\alpha - v\sin\alpha,$$

$$y = \left(z + e^{\frac{\alpha^2}{1}}\right)\sin\alpha + v\cos\alpha$$

---

(1) Borel, *loc. cit.*, p. 7.

dans lesquelles α est un paramètre arbitraire, et v une fonction de α :

1° *Déterminer la fonction v de façon que la surface définie par ces équations soit développable, et former les équations de son arête de rebroussement ;*

2° *Calculer les cosinus directeurs ξ, η, ζ de la normale à la surface en l'un quelconque de ses points, ainsi que les dérivées partielles p, q, r, s, t, et vérifier que l'équation différentielle des surfaces développables est bien satisfaite ;*

3° *Rechercher les lignes de courbure de la surface et ses rayons principaux.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée l'équation*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2}{x^3} y^3 - \frac{x+1}{x} y^2 + \frac{x^2+3}{3x} y + f(x),$$

déterminer la fonction $f(x)$ par la condition que l'équation admette une solution particulière β telle que, posant $y = \beta + y_1$, la détermination de y_1 dépende d'une équation de Bernoulli. Ayant ainsi déterminé $f(x)$, on calculera l'intégrale générale de l'équation.

(Juillet 1910.)

COMPOSITION. — *Une surface S étant définie par les équations*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad \varphi(z) = a\theta + f(r) :$$

1° *Déterminer la fonction $\varphi(z)$ par la condition que le triangle Omn ayant pour sommets l'origine O et les traces m, n, sur xOy, de l'ordonnée d'un point K de S et de la normale au même point ait une aire proportionnelle à z;*

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de S, et déterminer la fonction $f(r)$ par la condition que la surface S soit développable ;*

3° *Former les équations des génératrices, et montrer qu'elles font un angle constant avec Oz et sont à une distance constante de cet axe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer, par plusieurs méthodes*

si possible, les équations

$$4\frac{dy}{dx} + 9\frac{dz}{dx} + 44y + 49z = x,$$

$$3\frac{dy}{dx} + 7\frac{dz}{dx} + 34y + 38z = e^x.$$

(Novembre 1910.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Démontrer la formule*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Applications : série de Taylor et série de Laurent.

II. Problème. — 1° *Intégrer l'équation*

$$px + qy - 2z = 0.$$

2° *Montrer que les lignes asymptotiques des surfaces intégrales s'obtiennent par une quadrature;*

3° *La fonction soumise à la quadrature comprend un radical. Dans quel cas ce radical se réduit-il à une constante?*

4° *Effectuer la quadrature dans le cas où la surface intégrale passe par la courbe $y = 2x$, $z = 8x^2$.*

Construire les projections sur xOy des lignes asymptotiques menées par $x = 1$, $y = 1$.

5° *Trouver les trajectoires orthogonales des projections sur xOy des lignes asymptotiques de la surface précédente.*

Épreuve pratique. — *Calculer par approximation l'intégrale*

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^3 - x + 1}}.$$

Indiquer l'approximation obtenue.

(Juillet 1910.)

QUESTIONS.

2188. — Si les côtés d'un angle droit sont tangents à deux coniques homofocales, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique homofocale aux deux premières.

(Klug.)

2189. — Si par les extrémités d'un diamètre d'un cercle on mène deux tangentes non parallèles à une conique concentrique au cercle, la droite qui joint les points du contact enveloppe une conique homofocale à la première.

(Klug.)

2190. — Étant données deux coniques dans un même plan, on leur mène des tangentes aux points où elles sont rencontrées par une droite quelconque. Les sommets du quadrilatère ainsi formé, qui ne sont pas les points de rencontre de tangentes à une même conique, sont sur une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par les deux coniques proposées. (Thié.)

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES;

Par M. Maurice FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

(SUITE.)

19. *Discussion des divers cas.* — Pour discuter les divers cas qui peuvent se présenter, nous allons étudier les dispositions des trois couples de tores et leurs intersections avec les plans de coordonnées.

Rappelons que chaque tore coupe celui des trois plans de coordonnées par rapport auquel il n'est pas symétrique suivant une courbe du quatrième ordre qui est le lieu des points coniques communs aux cyclides des deux autres familles. Les formes de ces trois courbes définissent chacune des dispositions qui peuvent se présenter.

Désignons par a le rayon moyen d'un tore, c'est-à-dire le rayon du cercle stationnaire, par r le rayon du cercle méridien et par h la distance du centre du tore à l'origine. Le tore a des points coniques réels si a est inférieur à r, et n'en a pas si a est supérieur à r. La section de ce tore par le plan parallèle à son axe, situé à une distance h de son centre, peut présenter une assez grande variété de formes.

Quelle que soit la forme du tore, la section est :

Imaginaire si	$h > a + r$;
Un point si.................	$h = a + r$;
Une courbe ovale sans ondulation si..................	$a \leqq h < a + r$ et $h > r - a$.

Ensuite, il faut distinguer si le tore a des points coniques réels ou imaginaires, et dans le cas des points coniques réels si le cercle stationnaire est plus grand ou plus petit que le cercle intérieur de l'équateur.

Si les points coniques sont imaginaires, on a

$$a > r,$$

et la section est :

Un ovale ondulé si........	$a - r < h < a$;
En forme de 8 si..........	$h = a - r$;
Deux ovales séparés si......	$h < a - r$.

Si les points coniques sont réels et si le cercle stationnaire est plus grand que le cercle intérieur de l'équateur, c'est-à-dire si

$$a < r \quad \text{et} \quad r - a < a \quad \text{ou} \quad a > \frac{r}{2},$$

la section est :

Un ovale ondulé si......................	$r - a < h < a$;
Un ovale avec un point isolé au centre si	$h = r - a$;
Un ovale ondulé avec un ovale simple à l'intérieur si........................	$h < r - a$;
Deux cercles qui se coupent si.........	$h = 0$.

Si enfin le cercle stationnaire est plus petit que le cercle intérieur de l'équateur, c'est-à-dire si

$$a < r - a \quad \text{ou} \quad a < \frac{r}{2},$$

la section est :

Un ovale sans ondulation avec point isolé au centre si........................	$h = r \quad a$;
Un ovale sans ondulation avec un ovale simple à l'intérieur si................	$a \leqq h < r - a$;
Un ovale ondulé avec ovale simple à l'intérieur si	$h < a$;
Deux cercles qui se coupent si..........	$h = 0$.

Considérons les deux tores dont les axes parallèles à OY sont situés dans le plan OYZ. Un autre couple est composé de deux tores ayant leurs axes parallèles à OZ et admettant pour cercles stationnaires les cercles méridiens des premiers situés dans les plans parallèles à OXY : EF, et GH sur la figure 3.

Si l'on désigne par a, r, h les longueurs correspondant, pour ces tores, à a, r, h, on aura :

$$a_1 = r, \qquad r_1 = h, \qquad h_1 = a.$$

Pour le troisième couple on raisonnera de même en partant du second, et l'on pourra dresser le Tableau suivant :

	a, a_1, a_2.	r, r_1, r_2.	h, h_1, h_2.
1er couple......	a	r	h
2me couple......	r	h	a
3me couple......	h	a	r

En laissant de côté pour le moment les cas d'égalité, il y a toujours une des trois longueurs qui est plus grande que chacune des deux autres ; supposons que ce soit a,

$$a > r, \qquad a > h.$$

Il y a toujours un couple de tores sans points coniques réels coupant le plan de coordonnées correspondant suivant une courbe réelle.

Il y a en tout quatre cas à distinguer :

1° $h > a - r$ et $h > r$;

2° $r < h < a - r$,

ce qui suppose

$$a > 2r;$$

3° $a - r < h < r$,

ce qui suppose

$$a < 2r;$$

4° $h < a - r$ et $h < r$.

Premier cas :

$$h > a - r, \quad h > r.$$

Les tores du premier couple n'ont pas de points coniques réels et coupent le plan de coordonnées correspondant suivant une courbe ondulée.

Pour le second couple on a

$$r < h, \quad r < a < r + h, \quad a > h > h - r,$$

ou

$$a_1 < r_1, \quad a_1 < h_1 < a_1 + r_1, \quad h_1 > r_1 - a_1.$$

Donc les tores du second couple ont des points coniques réels et ils coupent le plan de coordonnées correspondant suivant un ovale sans ondulations.

Pour le troisième couple on a

$$h < a, \quad a - h < r < h,$$

ou

$$a_2 < r_2, \quad r_2 - a_2 < h_2 < a_2.$$

Les tores sont à points coniques réels et la courbe plane est un ovale ondulé.

Deuxième cas :

$$r < h < a - r.$$

La première courbe se compose de deux ovales séparés.

Pour le second couple on a :

$$r < h \quad \text{et} \quad a > r + h,$$

ou

$$a_1 < r_1 \quad \text{et} \quad h_1 > a_1 + r_1.$$

Les tores du second couple ont leurs points coniques réels, et leur intersection avec le plan de coordonnées correspondant est imaginaire.

Pour le troisième couple on a

$$h < a, \quad r < a - h, \quad r < h,$$

ou

$$a_2 < r_2, \quad h_2 < r_2 - a_2, \quad h_2 < a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane correspondante se compose de deux ovales intérieurs, le grand étant ondulé.

Troisième cas :

$$a - r < h < r.$$

La première courbe est ondulée.

Pour le second couple on a

$$r > h \quad \text{et} \quad r < a < r + h,$$

ou

$$a_1 > r_1 \quad \text{et} \quad a_1 < h_1 < a_1 + r_1.$$

Les tores n'ont pas de points coniques réels, et la courbe plane correspondante est un ovale sans ondulation.

Pour le troisième couple

$$h < a, \quad r > h, \quad a - h < r < a + h$$

ou

$$a_2 < r_2, \quad h_2 > a_2, \quad r_2 - a_2 < h_2 < r_2 + a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane est un ovale sans ondulation.

Quatrième cas :

$$h < a - r, \qquad h < r.$$

La première courbe se compose de deux ovales séparés.

Pour le second couple :

$$r > h, \qquad a > r + h,$$

ou

$$a_1 > r_1, \qquad h_1 > a_1 + r_1.$$

Les tores n'ont pas de points coniques réels et la courbe plane correspondante est imaginaire.

Pour le troisième :

$$h < a, \qquad r < a - h, \qquad r > h,$$

ou

$$a_2 < r_2, \qquad h_2 < r_2 - a_2, \qquad h_2 > a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane correspondante est un ovale sans ondulation avec un ovale simple à l'intérieur.

En résumé nous trouvons pour les quatre cas :

1° Un couple de tores sans points coniques réels et deux couples à points coniques réels.

Courbes planes : trois courbes réelles dont deux ovales ondulés, et un sans ondulation.

2° Un couple de tores sans points coniques réels et deux couples à points coniques réels.

Courbes planes : deux ovales séparés, un ovale ondulé avec ovale simple à l'intérieur, une courbe imaginaire.

3° Deux couples de tores sans points coniques réels, un couple à points coniques réels.

Courbes planes : trois ovales dont un seul est ondulé.

4° Deux couples de tores sans points coniques réels, un couple à points coniques réels.

Courbes planes : deux ovales séparés, un ovale sans ondulation avec ovale intérieur, une courbe imaginaire.

Il résulte de cette discussion qu'il n'y a jamais plus d'une courbe plane imaginaire. On en conclut qu'aucune des trois familles de cyclides ne peut se composer de cyclides ayant toutes leurs points coniques imaginaires, car, s'il en était ainsi, les lieux des points coniques des cyclides de cette famille situés dans deux plans de coordonnées seraient imaginaires. Ainsi, chacune des trois familles du système orthogonal se compose soit de cyclides ayant toutes des points coniques réels, soit de cyclides ayant des points coniques réels, et d'autres n'ayant que des points coniques imaginaires.

20. *Cas où toutes les cyclides d'une même famille ont leurs points coniques réels.* — On peut chercher la condition pour que toutes les cyclides d'une même famille aient leurs points coniques réels. On peut concevoir que tous ces points coniques réels soient sur les axes radicaux parallèles à un même axe de coordonnées, ou bien les uns sur ces axes-là, et les autres sur les axes radicaux parallèles à un autre axe de coordonnées.

Reprenons la construction indiquée au n° 16 (*fig.* 3). La cyclide qui a pour plan circonscrit le plan (P) a pour axes radicaux la parallèle à OY projetée en A et la parallèle à OZ menée par le point K, milieu de BD, soit la droite KLR qui coupe l'axe OX en R. Les points coniques situés sur le premier de ces axes radicaux sont

à l'intersection de cet axe avec le tore. Dans la rotation de la droite CA autour de C, le point A parcourt en entier l'axe OX pourvu toutefois que le centre du tore ne soit pas sur l'axe OX. Il est donc impossible que la droite qui se projette en A rencontre toujours le tore en deux points réels. Donc si les points coniques sont toujours réels sur des axes radicaux parallèles ils se trouveront sur la droite KR. Ces points coniques sont les intersections L et L' des cercles de rayon IB et JD tangents à la droite AC. L'axe radical de ces deux cercles est la droite KR, et la puissance du point K par rapport à ces deux cercles est égale à $\overline{KB}^2$ et aussi à $KL \times KL' = \overline{KR}^2 - \overline{RL}^2$, d'où

$$\overline{RL}^2 = \overline{KR}^2 - \overline{KB}^2.$$

Donc pour que les points L et L' soient réels il suffit que KR soit plus grand que KB. Il faut d'abord que KR ne devienne pas nul, c'est-à-dire que l'axe OX ne doit pas rencontrer le cercle stationnaire du tore. Ensuite, si l'on fait tourner la droite CA, le minimum de KR se présente quand CB est dirigée sur CO et la valeur de ce minimum est $SO = h - a$. La condition cherchée est donc :

$$h - a > r \qquad \text{ou} \qquad h > a + r,$$

c'est-à-dire que le tore, quelle que soit sa forme, ne doit pas couper le plan OXY; cela se présente dans les cas 2° et 4°, en choisissant convenablement le couple de tores. Ainsi, si l'une des familles se compose de cyclides ayant toutes leurs points coniques réels sur des axes radicaux parallèles, l'une des trois courbes planes est imaginaire, ce qui du reste était évident, puisque les points coniques de la première famille situés sur l'autre

axe radical sont tous imaginaires. Si l'on se reporte aux nos 2 et 4 de la discussion, on verra que c'est le second couple de tores qui ne coupe pas le plan de coordonnées correspondant. Donc c'est la troisième famille de cyclides qui a tous ses points coniques réels, et le lieu de ces points coniques est la section plane de la première famille qui se compose de deux ovales séparés décrits, l'un par le point L, l'autre par le point L'.

Enfin, le cas où tous les points coniques d'une même famille seraient réels, mais les uns sur l'axe radical parallèle à l'un des axes de coordonnées, les autres sur l'autre axe radical est impossible. Il faudrait en effet, pour nous reporter toujours à la figure 3, qu'au moment où les points coniques disparaissent sur l'axe radical parallèle à OZ, ils apparussent sur l'axe radical parallèle à OY. On aurait ainsi pour ce cas limite une cyclide ayant deux points coniques confondus sur l'un de ces axes radicaux et deux autres confondus sur l'autre axe. Or une pareille cyclide n'existe pas. On peut du reste se rendre compte de la même impossibilité sur la figure 3 où l'axe OX coupe le contour apparent extérieur du tore en un point T. Les points coniques apparaissent sur l'axe radical de la cyclide projetée en T quand la droite CBD prend la direction CT, mais alors la longueur KR devenu K'R' est plus petite que l'oblique K'T égale à r, de sorte que si l'on reporte le point légèrement sur la gauche de la figure, on aura une cyclide sans points coniques réels.

En résumé, sauf dans le cas où l'un des tores a son centre à l'origine des coordonnées, il n'y a jamais plus d'une famille de cyclides ayant toutes leurs points coniques réels. Ces points coniques sont situés sur des axes radicaux parallèles, et les cyclides de la même

famille sont toutes du type du tore déformé à points coniques réels.

21. *Cas particuliers.* — Les cas limites sont assez nombreux ; leur énumération serait fastidieuse et sans grand intérêt. Il est du reste très aisé de voir ce que deviennent les configurations précédentes quand une ou plusieurs des inégalités se trouvent remplacées par des égalités. Je me bornerai à indiquer quelques cas particuliers.

Si l'une des longueurs est nulle, ce sera r ou h. Supposons que ce soit h. Alors le premier couple de tores se compose de deux tores coïncidant sans points doubles réels, et coupant le plan OXY suivant deux cercles égaux qui ne se coupent pas. Le second couple se réduit aux cercles EF et GH (*fig.* 3, où l'axe OX doit être transporté sur la droite HF). Le troisième couple se réduit aux deux sphères engendrées par les cercles stationnaires du premier tore tournant chacun autour de leur diamètre parallèle à OX. Ces deux sphères coupent le plan OXZ suivant un même cercle réel. La famille de cyclides contenant ces deux sphères dérive par la construction du n° 16, du couple de tores réduit aux deux cercles EF et GH. Elle se compose des sphères passant par le cercle situé dans le plan OXZ. La famille qui dérive du tore unique présente cette particularité que toutes les cyclides qui la composent ont un axe radical commun projeté en C, et par suite les deux mêmes points coniques imaginaires au point où cet axe coupe le tore. Enfin la troisième famille se compose de cyclides passant par les deux cercles EF et GH. Toutes les cyclides qui la composent ont aussi les deux mêmes points coniques imaginaires sur l'axe OY projeté en C.

Si c'est r qui est nulle, le premier couple de tores se réduit à deux cercles coupant le plan OXY en deux points isolés sur l'axe OX. Le second couple se réduit à deux sphères qui ne coupent pas le plan OXZ, et le troisième couple à un seul tore à points coniques réels qui coupe le plan OXZ suivant les deux cercles égaux qui remplaçent les premiers tores. La famille qui dérive des deux cercles par la construction du n° 16 se compose des sphères orthogonales à ces deux cercles, ayant pour plan radical commun le plan OYZ qu'elles coupent suivant un même cercle imaginaire. La famille qui dérive des deux sphères se compose de cyclides passant par les deux cercles et admettant par conséquent pour points coniques communs les deux points d'intersection de ces cercles avec l'axe OX ; c'est celle qui comprend le tore, et toutes les cyclides qui la composent sont du type du tore déformé. Enfin, la troisième famille dérivant du tore et comprenant les deux cercles égaux se compose de cyclides du type à deux fuseaux ayant pour points coniques communs les deux mêmes points de l'axe OX.

Si deux des longueurs sont nulles, $h = r = 0$, le premier couple de tores se réduit à un cercle situé dans le plan OXZ et ayant son centre à l'origine, le second à deux points sur l'axe OX et le troisième à une sphère unique ayant son centre à l'origine. Les familles qui dérivent du cercle et des deux points sont composées de sphères, et la troisième se compose de cyclides à trois plans de symétrie.

C'est du reste le seul cas où se rencontre cette particularité ; pour qu'une cyclide ait trois plans de symétrie, il faut que ses deux axes radicaux se rencontrent. En vertu de la construction du n° 16 (*fig.* 3), il faudra donc que le point A se confonde avec le point B, et

par suite avec le point K. Cela arrivera si l'axe OX coupe le cercle moyen du tore, et si l'on fait passer la droit AC par le point d'intersection ; mais cette circonstance ne peut se présenter pour toutes les positions de la droite AC que si le tore se réduit à une sphère ayant son centre sur l'axe OX, c'est-à-dire si $h = r = 0$.

Le cas le plus remarquable est peut-être celui où les trois longueurs sont égales : $a = r = h$. Alors tous les tores sont égaux ; ils ont pour méridienne deux cercles égaux tangents et les lieux des points doubles sont des ovales de Cassini ayant leurs foyers à une distance du centre égale au rayon de ces cercles, avec leur petit axe égal à la distance des foyers et un rayon de courbure infini aux extrémités de ce petit axe. Ce qui fait l'intérêt de ce cas particulier, c'est que toutes les cyclides d'une famille sont respectivement égales à celles des deux autres familles. Parmi ces cyclides, il en est à points coniques réels du type du tore déformé, d'autres sans points doubles réels et d'autres à points doubles réels du type à deux fuseaux.

22. *Disposition des cyclides d'une même famille.* — Revenons au cas général. Les cyclides d'une même famille présentent des dispositions remarquables sur lesquelles il convient d'insister.

Il y a deux familles de cyclides qui se composent de surfaces admettant le plan OXY pour plan de symétrie. Les cyclides d'une de ces familles coupent ce plan chacune suivant deux cercles (ω) et (φ) ayant leur centre sur l'axe OX. Mais ces cyclides sont deux à deux symétriques par rapport au plan OYZ. Nous avons ainsi deux familles de cercles, celle des cercles (ω) et celle des cercles (φ), les cercles de chaque famille

étant deux à deux symétriques par rapport à l'origine O. Les cyclides de la seconde famille coupent également le plan OXY suivant deux familles de cercles (ω') et (φ') ayant leur centre sur OY et les cercles de chaque famille étant aussi deux à deux symétriques par rapport à l'origine.

Il faut de plus que les cercles (ω') soient orthogonaux aux cercles (ω) ou aux cercles (φ) : supposons que ce soit aux cercles (ω). Alors les cercles (φ) seront orthogonaux aux cercles (φ'). Nous aurons ainsi sur le plan OXY deux réseaux de cercles orthogonaux (ω) et (ω') d'une part, (φ) et (φ') d'autre part. De là résulte que l'origine O aura la même puissance m par rapport à tous les cercles (ω), la même puissance $-m$ par rapport à tous les cercles (ω'), la même puissance n par rapport à tous les cercles (φ), et la même puissance $-n$ par rapport à tous les cercles (φ').

Une cyclide est complètement déterminée par les cercles (ω) et (φ) à condition qu'on choisisse l'un des centres de similitude de ces deux cercles, S. Elle sera le lieu des cercles décrits dans les plans perpendiculaires au plan de ces deux cercles et admettant pour diamètres les segments EF qui joignent deux points antihomologues. Soient (*fig.* 4) A, B, C, D, les intersections de deux cercles avec la droite de leurs centres prise pour axe OX, les points antihomologues étant A et D, B et C.

D'après ce qu'on vient de dire, on aura pour toutes les cyclides de la même famille :

$$OA \times OB = m, \qquad OC \times OD = n.$$

Mais la cyclide considérée coupe le plan OXZ suivant les cercles ayant pour diamètre AD et BC. On aura donc encore, pour toutes les cyclides de la

même famille :

$$OA \times OD = m', \qquad OB \times OC = n'$$

avec la condition :

$$mn = m'n' = OA.OB.OC.OD.$$

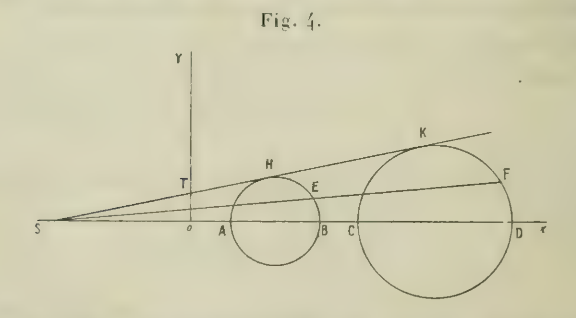
On voit ainsi que toutes les cyclides d'une même famille, et par suite le système orthogonal tout entier est complètement déterminé par les trois nombres m, n, m', comme il l'était par les trois nombres a, r, h. La valeur de m permet en effet de déterminer le cercle (AB) quand on s'en donne le centre ; la valeur de m' permet de placer le point D sur l'axe OX et celle de n, le point C, ce qui détermine complètement la figure. On obtient toute la famille en déplaçant le centre du cercle AB.

De même, *le système entier est complètement déterminé si l'on se donne une seule cyclide et le point* O *sur l'un des axes radicaux de cette cyclide.*

Il est aisé de construire alors l'un des tores qui ont servi à la construction du n° 16.

Considérons en effet (*fig.* 4) les deux plans circon-

Fig. 4.



scrits à la cyclide donnée qui se coupent suivant une droite projetée en S, et dont l'un touche les cercles

(AB) et (CD) en H et K respectivement. La droite SHK rencontre OY en T. On trace dans le plan OXY les deux cercles de centre T et de rayon TH et TK lesquels sont orthogonaux respectivement aux cercles (AB) et (CD). Le tore cherché a son axe parallèle à OZ projeté en T. Son équateur se compose des cercles TH et TK et sa méridienne est le cercle ayant pour diamètre HK et situé dans un plan perpendiculaire au plan OXY.

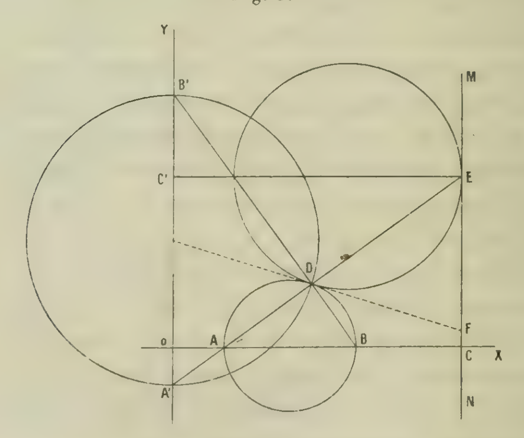
23. *Systèmes orthogonaux composés de cyclides du troisième ordre.* — Étudions maintenant les systèmes orthogonaux dont la représentation sphérique se compose de cercles passant tous par un même point de la sphère. Dans ce cas toutes les surfaces d'une même famille ont la même représentation sphérique qui se compose des cercles passant par un point de la sphère, et tangents en ce point à l'une ou l'autre de deux droites rectangulaires situées dans le plan tangent à la sphère et passant par le point de contact. Nous avons déjà vu (n° 11) que les cyclides correspondantes sont du troisième ordre et qu'elles admettent chacune deux plans circonscrits le long d'une droite et parallèles au plan tangent à la sphère au point par où passent tous les cercles de la représentation sphérique. Ces deux droites sont d'ailleurs parallèles aux droites (D) et (E) autour desquelles pivotent les plans des cercles de la représentation sphérique, et toutes les lignes de courbure des cyclides de la famille correspondante sont des cercles dont les plans passent par l'une de ces droites. Dans la représentation sphérique du système orthogonal, il y a trois réseaux de cercles orthogonaux, un pour chaque famille, et les six droites correspondantes sont parallèles aux trois axes de coordonnées, les deux

droites correspondant à une même famille étant tangentes à la sphère à l'une des extrémités d'un des diamètres de la sphère parallèles aux axes de coordonnées.

Il en résulte déjà que tous les plans circonscrits aux cyclides sont parallèles à l'un des plans de coordonnées et toutes les droites stationnaires parallèles à l'un des axes de coordonnées. Ensuite on démontrera comme au n° 14 que toutes les cyclides d'une même famille sont symétriques, chacune par rapport à deux des plans de coordonnées et deux à deux par rapport au troisième. Dès lors, le système peut être construit de la manière suivante :

Traçons dans le plan OXY une droite MN (*fig.* 5) parallèle à OY, coupant OX en C, et un cercle ayant

Fig. 5.



son centre sur OX et coupant cet axe en A et B. L'une des cyclides de la première famille pourra être définie par ce cercle et cette droite en choisissant A ou B pour pied de l'autre droite stationnaire. Ces droites station-

naires sont en même temps les axes radicaux de la cyclide. Par exemple, si l'on mène la droite ADE coupant le cercle AB en D et la droite MN en E, la cyclide sera le lieu des cercles ayant leurs plans perpendiculaires au plan OXY et admettant DE pour diamètre, lorsque la droite ADE pivote autour de A. La même cyclide pourrait encore être définie par le cercle du plan OXZ ayant CB pour diamètre, la parallèle menée par A à OZ, et le point C comme centre de pivotement.

L'une des cyclides de la seconde famille devra passer par le cercle de diamètre DE et sera symétrique par rapport au plan OXY. Mais la première cyclide est l'enveloppe des sphères dont les grands cercles situés dans le plan OXY sont tangents au cercle AB et à la droite MN. L'une de ces sphères a pour grand cercle le cercle tangent en D au cercle AB et en E à la droite MN. Alors la sphère orthogonale, circonscrite à la deuxième cyclide, aura son centre au point F, intersection de MN avec la tangente en D au cercle AB. Cette deuxième cyclide contenant le cercle DE aura l'un de ses axes radicaux dans le plan perpendiculaire au plan de la figure passant par DE, et puisque cet axe radical doit être parallèle à l'un des axes de coordonnées et situé dans l'un des plans de coordonnées, ce sera la parallèle à OZ projetée en A', intersection de la droite DE avec OY. L'autre axe radical sera parallèle à OX. Donc cette deuxième cyclide sera définie par un axe radical parallèle à OX, un centre de pivotement A' situé sur l'axe OY, et un cercle situé dans le plan OXY passant par A' et ayant son centre sur OY. Elle est alors complètement déterminée.

D'abord, le centre de pivotement A' est, comme on vient de le voir, à l'intersection de ED avec OY. L'axe radical devant être tangent à la sphère de centre F en

un point du cercle DE passe nécessairement par E; c'est la parallèle à OX menée par E, laquelle coupe OY en C'. Enfin, le cercle passant par A' dans le plan OXY doit passer aussi par D, puisque ED est le diamètre de l'un des cercles de la cyclide dont le plan est perpendiculaire à OXY. Il coupera donc OY en un second point B' qu'on obtient par l'intersection de OY avec la droite BD perpendiculaire à ED. Ce cercle est bien, comme il doit être, tangent au cercle de centre F, car il est orthogonal au cercle AB, puisqu'il est circonscrit au triangle A'DB' lequel a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux du triangle ADB auquel est circonscrit le cercle AB, d'où il suit qu'on passe de l'un à l'autre par une homothétie suivie d'une rotation d'un angle droit.

En faisant pivoter la droite A'DE autour de A', on construira ainsi toutes les cyclides de la seconde famille. Celles de la troisième s'obtiendront de la même manière en remplaçant respectivement le cercle AB, la droite MN et le centre de pivotement A dans le plan OXY, par le cercle BC, la parallèle à OZ menée par A et le centre de pivotement C dans le plan OXZ. Enfin les cyclides de la première famille se construisent de la même manière en partant d'une de celles de la seconde ou de la troisième famille.

24. *Le système est bien orthogonal.* — Pour vérifier que le système ainsi formé est bien orthogonal, considérons un point M de la cyclide initiale. Par ce point passent deux cercles de courbure DE et $\delta\varepsilon$. Une cyclide de la seconde famille passe par DE, une de la troisième par $\delta\varepsilon$ et ces deux-là coupent orthogonalement la surface initiale d'après la construction même. De plus, elles sont orthogonales entre elles au

point M puisque leurs intersections DE et $\delta\varepsilon$ sur la cyclide initiale sont perpendiculaires.

Alors, en reprenant, avec des modifications faciles, le raisonnement qui termine le n° 17, on démontrera que toute cyclide de la deuxième famille coupe chaque cyclide de la troisième famille orthogonalement suivant un cercle de courbure et réciproquement.

Supposons maintenant que la première famille ait été construite au moyen d'une cyclide (C_2) de la deuxième famille. Cette cyclide (C_2) coupe une des cyclides (C_3) de la troisième famille suivant un cercle de courbure (S_1). Soit N un point du cercle (S_1). Par ce point N passent sur les deux cyclides (C_2) et (C_3) deux autres cercles de courbure (S_3) et (S_2), et les tangentes à ces trois cercles au point N forment un trièdre trirectangle, puisque les cyclides (C_2) et (C_3) sont orthogonales et que les cercles de courbure d'une même cyclide sont orthogonaux. L'une des cyclides (C_1) de la première famille passe par le cercle (S_3) et est orthogonale à la cyclide (C_2). Donc son plan tangent contient la tangente à (S_3) et est perpendiculaire au plan des tangentes à (S_3) et (S_1). C'est donc une des faces du trièdre trirectangle et les trois cyclides sont orthogonales au point N.

Le raisonnement du n° 17 montre alors que les cyclides (C_1) et (C_3) se coupent suivant un cercle le long duquel elles sont orthogonales. Ainsi toutes les cyclides de la première famille coupent orthogonalement celles de la troisième.

Considérons enfin deux cyclides (C'_1) et (C'_3) des familles 1 et 3 se coupant orthogonalement suivant un cercle (S'_2) et admettant deux autres cercles de courbure (S'_3) et (S'_1). Nous savons déjà que par (S'_1) situé sur (C'_3) passe une cyclide de la seconde famille ortho-

gonale à (C'_3). La répétition du raisonnement précédent montrera qu'elle est orthogonale à (C'_1), de sorte que toute cyclide de la seconde famille est orthogonale à toutes les cyclides de la première et ainsi se trouve achevée la démonstration.

La construction indiquée au n° 23 montre que la deuxième cyclide est complètement déterminée par le cercle DE situé sur la première, d'où il suit que la deuxième famille est complètement déterminée par une seule cyclide de la première ; mais puisque toutes les cyclides de la deuxième famille sont orthogonales à toutes celles de la première, on retrouvera la même deuxième famille si l'on applique la construction du n° 23 à l'une quelconque des cyclides de la première famille, et plus généralement, le système complet peut être déduit, par la construction indiquée, d'une seule cyclide, pourvu qu'on donne en même temps l'origine des coordonnées sur la perpendiculaire commune aux axes radicaux de cette cyclide.

25. *Dispositions des cyclides. Réalité des points coniques.* — On peut faire deux remarques utiles sur les formes des cyclides et leur intersection avec les plans de coordonnées.

Les raisonnements du n° 18 relatifs aux points coniques des cyclides du quatrième ordre s'appliquent sans changement aux cyclides du troisième ordre ; mais celles-ci coupent suivant des coniques les plans parallèles à leurs plans circonscrits. Donc :

Toutes les cyclides d'une même famille coupent suivant une même conique celui des trois plans de coordonnées par rapport auquel elles ne sont pas symétriques. Cette conique est le lieu des points coniques des deux autres familles situées dans ce plan-là. Il y a

ainsi trois coniques situées chacune dans un des plans de coordonnées, dont chacune est focale des deux autres. L'une est une ellipse réelle située par exemple dan le plan OYZ et ayant ses foyers réels sur OZ ; la seconde, une hyperbole située dans le plan OXZ ayant pour sommets réels les foyers de l'ellipse précédente, et pour foyers réels les sommets da la même ellipse sur l'axe OZ. La troisième est une ellipse imaginaire située dans le plan OXY et admettant pour sommets les foyers imaginaires de l'ellipse et de l'hyperbole précédentes.

On en conclut qu'aucune des cyclides du système n'a de points coniques réels dans le plan OXY.

Appelons première famille celle des cyclides qui ont leurs plans circonscrits parallèles à OYZ. Celles-là passent toutes par l'ellipse située dans ce plan-là, et ont leurs points coniques réels sur l'hyperbole située dans le plan OZX, laquelle a pour axe transverse l'axe OZ. Les deux axes radicaux de ces cyclides sont parallèles à OY et à OZ. Ce dernier rencontre toujours l'hyperbole. Donc, les cyclides de la première famille ont toutes leurs points coniques réels sur des axes radicaux parallèles, ce qui du reste résultait aussi de ce fait qu'elles admettent une section elliptique par le plan OYZ.

Les cyclides de la deuxième famille seront celles dont les plans circonscrits sont parallèles au plan OZX. Elles passent toutes par l'hyperbole précédente et ont leurs points coniques sur l'ellipse ; mais l'axe radical parallèle à OX peut occuper toutes les positions possibles comme cela résulte de la construction du n° 23 ; il arrive donc qu'il coupe ou ne coupe pas l'ellipse en deux points réels. Donc les cyclides de la seconde famille ont leurs points coniques tantôt imaginaires et

tantôt réels sur des axes radicaux parallèles. Il y en a deux qui ont leurs points coniques confondus.

Enfin, la troisième famille comprend les cyclides dont les axes radicaux sont parallèles à OX et à OY; celles-là coupent le plan OXY suivant l'ellipse imaginaire, et elles ont leurs points coniques les unes sur l'ellipse, les autres sur l'hyperbole. Comme une cyclide n'a pas plus de deux points coniques réels, si l'axe radical parallèle à OX coupe l'hyperbole, l'axe radical parallèle à OY ne coupera pas l'hyperbole; mais il peut se faire qu'aucune de ces deux droites ne coupe la conique correspondante, et cela arrivera nécessairement pour certaines cyclides de la famille, car autrement, on aurait un cas limite où l'une des droites serait tangente à l'ellipse et l'autre à l'hyperbole et par suite une cyclide ayant deux points coniques doubles, ce qui est impossible.

Ainsi, il n'existe pas de famille composée exclusivement de cyclides sans points coniques réels, sauf un cas particulier sur lequel nous reviendrons plus loin.

(*A suivre.*)

[B1a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES MATRICES LINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Prenons deux matrices linéaires n-aires u et v, dont une au moins, par exemple u, est invertible, $|u| \neq 0$. Nommons $\theta = uv$, $\eta = vu$, les deux matrices-produits.

On a

$$u^{-1}\theta u = u^{-1}uvu = \eta;$$

les deux matrices θ *et* η *sont semblables.*

Le raisonnement tombe lorsque ni u ni v n'est invertible; la proposition ne subsiste pas non plus, ainsi qu'on le reconnaît sur un exemple simple,

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\theta = u, \qquad \eta = 0.$$

On peut donc se poser le problème suivant : *Quelles sont les conditions* J, *nécessaires et suffisantes pour que les deux matrices-produits* θ *et* η *soient semblables ?*

Le présent travail contient la solution du problème.

On reconnaît d'abord que les deux matrices n-aires θ et η ont même polynome caractéristique (E = n-aire unité),

$$|\rho E - \theta| = |\rho E - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynome de degré h, avec $\varphi(0) \neq 0$.

La réponse à la question est fournie par la proposition ci-dessous.

Théorème. — *Les conditions* J *sont les suivantes :* θ^s *et* η^s *ont même rang, pour* $s = 1, 2, \ldots, \varpi$, ϖ étant un entier positif qui ne dépasse pas $n - h$.

1° On conservera la terminologie et les notations employées dans mes précédentes recherches sur les matrices linéaires [1].

---

[1] I. *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905). — II. *Sur les coordonnées pluckériennes de droite dans*

Avant d'entamer la démonstration du théorème, il convient de rappeler ou d'établir quelques théories préliminaires.

2° Soient $a = (a_{\alpha\beta})$, $b = (b_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ deux matrices n-aires. Formons dans la matrice-produit ab, la somme des éléments principaux, c'est-à-dire situés sur la diagonale principale; cette somme est

$$\sum_{\alpha} (ab)_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} b_{\beta\alpha}$$

et ne change pas quand on permute α et β, c'est-à-dire a et b. Cette somme est donc la même pour les deux matrices-produits ab et ba.

3° Rangeons dans un ordre déterminé les

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

combinaisons de n indices pris m à m, et numérotons ces combinaisons au moyen d'un indice l variant de 1 à $\binom{n}{m}$. Associons dans la matrice n-aire a les lignes d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_m$ pour former un mineur de degré m

$$A_{ll'} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}.$$

l'espace à $n-1$ dimensions (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 11e cahier). — III. *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 14e cahier). — IV. *Sur les matrices linéaires non invertibles* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1909). On renverra à la présente liste par des notations comme (*Index*, II) par exemple.

On aura la matrice

$$\binom{n}{m} - \text{aire}\,(A_{ll'})\left[l',\, l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right]$$

que j'ai nommée $\Delta_m a$ (*Index*, II, Chap. VII). On a dans ce travail établi la propriété $\Delta_m ab = \Delta_m a \,.\, \Delta_m b$.

4° Formons le polynome caractéristique $|\rho E - a|$ de la matrice a, où E est la n-aire unité. Ce polynome est

$$F(\rho) = \sum_{i=0}^{i=n} \rho^{n-i}(-1)^i Q_i,$$

d'après des théories connues; le coefficient Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\binom{n}{i}$ — aire $\Delta_i a$ (3°).

Au lieu de a prenons le produit ab, Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\Delta_i ab = \Delta_i a \,.\, \Delta_i b$, c'est-à-dire (2°) dans la matrice $\Delta_i b \,.\, \Delta_i a = \Delta_i ba$. Donc *les deux matrices-produits ab et ba ont même polynome caractéristique.*

5° Décomposons le polynome caractéristique de la n-aire a en ses successifs (*Elementarteiler*)

$$|\rho E - a| = \Pi(\rho - l)^\lambda, \qquad n = \Sigma\lambda.$$

Nommons Λ la matrice λ-aire

$$\Lambda = \begin{vmatrix} l & & & & & \\ 1 & l & & & & \\ 0 & 1 & l & & & \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & l \end{vmatrix},$$

qui admet le successif unique $(\rho - l)^\lambda$. Λ sera (*Index*, IV; *Préliminaires*, Chap. I) une composante de a. Soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ les composantes rangées dans

un ordre quelconque ; la n-aire

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

sera semblable à a et sera la *forme typique de a*. On aura, pour une n-aire invertible convenable R, $\mathfrak{A} = R^{-1} a R$ et a sera *mise sous forme typique*.

La forme typique ne dépend que des successifs, qui la définissent sans ambiguïté, à l'ordre des composantes près, lequel est facultatif.

6° Supposons que la n-aire a ait une puissance nulle et que p soit l'exposant minimum tel que $a^p = 0$. Les successifs de a seront des puissances de ρ. On aura (*Index*, III, 21°)

$$\left.\begin{array}{lcl} g = g_0 \text{ fois le successif} & & \rho^{p_0} \\ g_1 & \text{»} & \rho^{p_1} \\ \ldots\ldots & & \\ g_i & \text{»} & \rho^{p_i} \\ \ldots\ldots & & \\ g_k & \text{»} & \rho^{p_k} \end{array}\right| \begin{array}{c} p > p_1 > \ldots p_i > \ldots > p_k, \\ p_0 = p, \\ n = \sum_{i=0}^{i=k} p_i g_i ; \end{array}$$

$$\gamma_i = g + g_1 + \ldots + g_i;$$

a possède γ_k successifs. Combien en possédera a^s ?

On fera usage du théorème de Bromwich (*Index*, IV ; première Partie, Chap. II). Divisons p_i par s ; nommons q_i le quotient et $t_i < s$ le reste. Le successif ρ^{p_i} de a sera remplacé dans a^s par s successifs, savoir : les $s - t_i$ successifs ρ^{q_i} et les t_i successifs ρ^{q_i+1}. Si $s > p_i$, on posera $q_i = 0$, $t_i = p_i$; a^s aura p_i successifs linéaires.

7° Nommons P_i le système des g_i successifs ρ^{p_i} et l_s le nombre des successifs de a^s. En vertu de ce qui précède, P_i fournit à l_s le contingent sg_i sans que ce

contingent puisse dépasser $p_i g_i$. l_s s'obtient sans peine par un schéma très simple.

8° Traçons (le lecteur est prié de faire la figure) dans un plan p parallèles horizontales équidistantes (1), (2), ..., (s), ..., (p); (2) est au-dessus de (1); (3) est au-dessus de (2), etc. Rangeons les systèmes P_i de gauche à droite dans l'ordre croissant des indices. Faisons correspondre, à P_i, $p_i g_i$ points rangés g_i à g_i sur les parallèles (1), (2), ..., (p_i). On voit de suite sur le schéma que l_s *est le nombre des points du schéma situé sur la droite* (s) *ou au-dessous de cette droite.*

9° Posons $((s)) = l_s - l_{s-1}$ et formons la suite des entiers

$$((2)), \quad ((3)), \quad \ldots \quad ((p)).$$

On aura

$$((2)) = ((3)) = \ldots = ((p_k)) = \gamma_k = g + g_1 + \ldots + g_k.$$

Quand s dépasse p_k, $((s))$ saute de γ_k à $\gamma_{k-1} = \gamma_k - g_k$. On a ainsi les entiers g_k et p_k.

$((p_k + 1)), \ldots, ((p_{k-1}))$ sont égaux à γ_{k-1}, mais

$$((p_{k-1} + 1)) = \gamma_{k-2} = \gamma_{k-1} - g_{k-1},$$

ce qui fournit g_{k-1} et p_{k-1} et ainsi de suite.

En définitive : *chacun des deux systèmes d'entiers* $((2)), \ldots, ((p))$ *et* p_i, g_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *définit l'autre système sans ambiguité.*

La connaissance des entiers $((s))$ assure celle des successifs.

La connaissance des nombres l_s assure aussi celle des successifs.

10° On vérifie sur-le-champ, sur la forme typique (5°),

que chaque successif réduit d'une unité le rang d'une matrice a telle que $a^p = 0$. On a donc, pour la matrice a (6°),

$$\text{rang de } a^s = \mathrm{R}g.a^s = n - l_s.$$

Soit b une seconde n-aire, dont une certaine puissance s'annule. Si l'on a ϖ pour entier minimum tel que $a^\varpi = b^\varpi = 0$, les relations

$$\mathrm{R}g.a^s = \mathrm{R}g.b^s, \qquad s = 1, 2, \ldots, \varpi,$$

entraîneront, d'après ce qui précède, l'égalité des entiers l_s pour a et b, l'identité des successifs et enfin la similitude de a et b.

11° Nous sommes maintenant à même d'aborder la démonstration du théorème.

12° Soient les quatre n-aires u, v, $\theta = uv$, $\eta = vu$ et $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les formes typiques (5°) de θ et η. On aura, pour des n-aires invertibles L et M convenablement choisies,

$$\begin{aligned} \theta &= \mathrm{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathrm{L}, & \eta &= \mathrm{M}^{-1}\mathfrak{B}\mathrm{M}, \\ \mathfrak{A} &= \mathrm{UV}, & \mathfrak{B} &= \mathrm{VU}, \\ \mathrm{U} &= \mathrm{L}u\mathrm{M}^{-1}, & \mathrm{V} &= \mathrm{M}v\mathrm{L}^{-1}. \end{aligned}$$

13° θ et η ont même polynome caractéristique (4°); donc

$$|\rho\mathrm{E} - \theta| = |\rho\mathrm{E} - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynome de degré h, avec $\varphi(0) \neq 0$. On aura pour les deux formes typiques

$$\mathfrak{A} = \underset{h \quad n-h}{\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}\begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}, \qquad \mathfrak{B} = \underset{h \quad n-h}{\begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}\begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= |\rho e_h - \mathrm{A}| \quad = |\rho e_h - \mathrm{B}|, & |\mathrm{A}| &\neq 0, \\ \rho^{n-h} &= |\rho e_{n-h} - a| = |\rho e_{n-h} - b|, & |\mathrm{B}| &\neq 0; \end{aligned}$$

$e_h = h$-aire unité; $e_{n-h} = (n-h)$-aire unité. A et B

sont invertibles tandis que $a^{\varpi} = b^{\varpi} = 0$ pour $\varpi \leq n - r$.

14° On peut écrire en toute hypothèse

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ n-h \end{matrix}.$$
$$\quad h \quad n-h \qquad\qquad\qquad h \quad n-h$$

U_{11}, V_{11} = matrice h-aire; U_{22}, V_{22} = matrice $(n-h)$-aire; U_{12}, V_{12} = tableau à h lignes et $n-h$ colonnes; U_{21}, V_{21} = tableau à $n-h$ lignes et h colonnes.

15° On vérifie immédiatement que pour un entier positif s quelconque

$$U\mathfrak{B}^s = \mathfrak{A}^s U, \qquad V\mathfrak{A}^s = \mathfrak{B}^s V. \tag{0}$$

En effet, par exemple,

$$U\mathfrak{B}^s = U\,\overbrace{VU\,VU\ldots VU}^{s \text{ fois.}} = \overbrace{UV\ldots UV}^{s \text{ fois.}}\,U = \mathfrak{A}^s U.$$

Il viendra

$$U\mathfrak{B}^s = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}B^s & U_{12}b^s \\ U_{21}B^s & U_{22}b^s \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{A}^s U = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^sU_{11} & A^sU_{12} \\ a^sU_{21} & a^sU_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} U_{11}B^s = A^sU_{11} & U_{12}b^s = A^sU_{12}, \\ U_{21}B^s = a^sU_{21} & U_{22}b^s = a^sU_{22}. \end{array}\right. \tag{1}$$

De même

$$V\mathfrak{A}^s = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}A^s & V_{12}a^s \\ V_{21}A^s & V_{22}a^s \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{B}^s V = \begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^sV_{11} & B^sV_{12} \\ b^sV_{21} & b^sV_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} V_{11}A^s = B^sV_{11} & V_{12}a^s = B^sV_{12}, \\ V_{21}A^s = b^sV_{21} & V_{22}a^s = b^sV_{22}. \end{array}\right. \tag{2}$$

16° Dans les relations (1) et (2) ci-dessus, faisons $s = \varpi$, $a^\varpi = b^\varpi = 0$ (13°). Il viendra notamment

$$0 = A^\varpi U_{12} = U_{21} B^\varpi = B^\varpi V_{12} = V_{21} A^\varpi,$$

et, comme $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$,

$$0 = U_{12} = U_{21} = V_{12} = V_{21}.$$

De là finalement, pour $s = 1$,

$$(3) \quad \begin{cases} U_{11} B = A U_{11} & U_{22} b = a U_{22}, \\ V_{11} A = B V_{11} & V_{22} a = b V_{22}, \end{cases}$$

et, comme $\mathfrak{A} = UV$, $\mathfrak{B} = VU$,

$$(4) \quad \begin{cases} A = U_{11} V_{11} & B = V_{11} U_{11}, \\ a = U_{22} V_{22} & b = V_{22} U_{22}. \end{cases}$$

A et B étant invertibles, U_{11} et V_{11} le sont aussi.

17° A et B sont semblables, car

$$U_{11}^{-1} A U_{11} = U_{11}^{-1} U_{11} V_{11} U_{11} = V_{11} U_{11} = B.$$

A et B ont mêmes successifs et sont (5°), par suite, identiques, étant toutes deux typiques.

Pour que θ et η (12°) soient semblables, il faut et il suffit que

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

le soient; A et B le sont déjà; il faut donc que a et b soient semblables.

Comme (13°) $a^\varpi = b^\varpi = 0$, les considérations du 10° s'appliquent. Les conditions de similitude, nécessaires et suffisantes, sont

$$(5) \quad \begin{cases} \mathrm{R}g.a^s = \mathrm{R}g.b^s, \\ s = 1, 2, \ldots, \varpi. \end{cases}$$

Or

$$\mathrm{Rg}.\mathfrak{A}^s = \mathrm{Rg}.\mathrm{A}^s + \mathrm{Rg}.a^s = h + \mathrm{Rg}.a^s,$$
$$\mathrm{Rg}.\mathfrak{B}^s = \mathrm{Rg}.\mathrm{B}^s + \mathrm{Rg}.b^s = h + \mathrm{Rg}.b^s.$$

18° Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, but et résultat de toute la présente discussion :

Théorème. — *Soient les quatre matrices n-aires* u, v, $\theta = uv$, $\eta = vu$;

$$|\rho \mathrm{E} - \theta| = |\rho \mathrm{E} - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho), \qquad \varphi(0) \neq 0,$$

$\mathrm{E} =$ *n-aire unité.*

Pour que θ *et* η *soient semblables, il faut et il suffit que* θ^s *et* η^s *aient même rang pour* $s = 1, 2, \ldots, \varpi$, *où l'entier* ϖ *ne peut dépasser* $n - h$.

19° Si θ et η sont semblables, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont semblables et, étant typiques, sont identiques,

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Omega, \qquad a = b = \omega.$$

Les relations (4) du 16° donnent

$$\mathrm{U}_{11}\mathrm{V}_{11} = \mathrm{V}_{11}\mathrm{U}_{11} = \Omega,$$
$$\mathrm{U}_{22}\mathrm{V}_{22} = \mathrm{V}_{22}\mathrm{U}_{22} = \omega;$$

U_{11} et V_{11} sont échangeables ainsi que U_{22} et V_{22}.

[D2b]

SUR QUELQUES SÉRIES NUMÉRIQUES;

Par M. Camille DENQUIN.

I. La formule connue

$$(1) \qquad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

qui équivaut, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement, à la formule

$$(2)\qquad A = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

s'établit d'habitude, soit en comparant les développements de $\sin x$ en série et en produit infini, soit en développant la fonction x^2 en série de Fourier.

Je me suis proposé d'établir directement la formule (2) en la rattachant à la formule de Leibniz,

$$(3)\qquad B = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

par une élévation au carré. Comme la série (3) n'est pas absolument convergente, la règle ordinaire de multiplication des séries n'est pas applicable, et il faut des précautions spéciales pour mettre les calculs à l'abri de toute objection.

La méthode que j'ai employée conduit à la sommation d'une série numérique double intéressante : la formule (11) qu'on trouvera plus loin paraît nouvelle.

II. Nous établirons d'abord une formule de sommation pour la série

$$(4)\qquad C_q = \frac{2}{1(2q+1)} + \frac{2}{3(2q+3)} + \frac{2}{5(2q+5)} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2q+2n+1)}.$$

Cette série, où q désigne un entier positif arbitraire, est évidemment convergente.

Écrivons successivement

$$\frac{2q}{1(2q+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2q+1},$$

$$\frac{2q}{3(2q+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2q+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2q}{(2q-1)(4q-1)} = \frac{1}{2q-1} - \frac{1}{4q-1},$$

$$\frac{2q}{(2q+1)(4q+1)} = \frac{1}{2q+1} - \frac{1}{4q+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2q}{(2n+1)(2q+2n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2q+2n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En ajoutant toutes ces égalités, et en tenant compte des termes qui se détruisent, on trouve

$$q\,C_q = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2q-1}.$$

En doublant, et réunissant dans le second membre les termes équidistants des extrêmes, il vient

$$2q\,C_q = \frac{2q}{1(2q-1)} + \frac{2q}{3(2q-3)} + \ldots + \frac{2q}{(2q-3)3} + \frac{2q}{(2q-1)1}$$

et finalement

$$(5) \qquad C_q = \sum_{r=0}^{r=q-1} \frac{1}{(2r+1)(2q-2r-1)}.$$

III. Dans la suite du raisonnement, nous introduirons la série double ayant pour terme général

$$(6) \quad u_{m,n} = \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} - \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)}$$

$$= \frac{4}{(2n+1)(2n+4m+3)(2n+4m+5)},$$

m et n prenant séparément les valeurs 0, 1, 2, ... En vertu d'un théorème général ([1]), cette série à termes positifs est convergente, car $u_{m,n}$ est de la forme $\frac{1}{f(m,n)}$, f étant un polynome de degré supérieur à 2.

Nous poserons

$$D = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{m,n}. \tag{7}$$

Les termes $u_{m,n}$ peuvent être écrits dans un ordre quelconque, sans que la somme D soit modifiée.

IV. Il est facile d'établir une relation entre la série D et les séries C_q considérées plus haut (4).

On a, en effet, en donnant à q successivement les valeurs $2m+1$ et $2m+2$,

$$C_{2m+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)},$$

$$C_{2m+2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)};$$

d'où, en retranchant ces séries terme à terme,

$$C_{2m+1} - C_{2m+2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{m,n}.$$

Donnons à m successivement les valeurs 0, 1, 2, ... et ajoutons; il vient, en profitant de ce que les termes de la série D peuvent être écrits dans un ordre arbitraire

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} (C_{2m+1} - C_{2m+2}) = D. \tag{8}$$

([1]) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 304.

V. Cela posé, considérons un nombre *fini* de termes de la série de Leibniz, et écrivons

$$B_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{4p-1} + \frac{1}{4p+1}.$$

Élevons au carré, en écrivant d'abord les carrés des termes du second membre, puis les doubles produits négatifs, puis les doubles produits positifs. Il vient

$$\begin{aligned} B_p^2 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)^2} \\ -\sum \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} \\ +\sum \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)}. \end{aligned}$$

Dans les deux Σ, m et n sont des entiers positifs ou nuls. Dans le premier Σ, $2n+4m+3$ est au plus égal à $4p+1$. Dans le second Σ, $2n+4m+5$ est au plus égal à $4p+1$.

Il est clair qu'à tout terme du second Σ correspond un terme du premier, pour lequel m et n ont respectivement les mêmes valeurs. En réunissant deux à deux les termes correspondants, il ne restera dans le premier Σ que les termes pour lesquels $2n+4m+3$ est égal à $4p+1$. On écrira donc

$$\begin{aligned} B_p^2 = 1 + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)^2} \\ -\sum \left[\frac{2}{(2n+1)(2n+4m+3)} - \frac{2}{(2n+1)(2n+4m+5)}\right] \\ - \frac{2}{4p+1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4p-1}\right). \end{aligned}$$

Rappelons que, dans le Σ de la seconde ligne, n et m sont tels que

$$2n + 4m + 5 \leqq 4p + 1.$$

Faisons maintenant croître p indéfiniment; la première ligne du second membre tend vers la somme

$$A = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots$$

La seconde ligne tend vers — D, somme changée de signe de la série double introduite au n° III. Quant au terme complémentaire

$$-\frac{2}{4p+1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right),$$

il tend vers zéro; en effet, la somme entre parenthèses est moindre que la somme des $4p-1$ premiers termes de la série harmonique, somme asymptotique, comme on sait, à $L(4p-1)$. Donc, etc.

Enfin B_p tend vers $B = \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$B^2 = \frac{\pi^2}{16} = A - D. \tag{9}$$

VI. Nous obtiendrons une autre relation en écrivant B_p d'une manière différente, à savoir en groupant les produits de fractions dont les dénominateurs ont la même somme. On trouve ainsi

$$B_p^2 = P + Q,$$

en posant

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{1} & \\ & -\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.1}\right) \\ & +\left(\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.1}\right) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\left[\frac{1}{1(4p-3)}+\ldots+\frac{1}{(4p-3)1}\right] \\ & -\left[\frac{1}{1(4p-1)}+\ldots+\frac{1}{(4p-1)1}\right] \end{aligned}$$

et

$$Q = \left[\frac{1}{1(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)1}\right]$$
$$-\left[\frac{1}{3(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)3}\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\left[\frac{1}{(4p-1)(4p+1)} + \frac{1}{(4p+1)(4p-1)}\right]$$
$$+\frac{1}{(4p+1)^2}.$$

On voit tout d'abord que les termes de la somme alternée égale à P sont, d'après la formule (5), égaux en valeur absolue aux sommes successives $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$. On a donc

$$P = (C_1 - C_2) + \ldots + (C_{2p-1} - C_{2p}).$$

Si l'on fait croître p indéfiniment, le second membre de cette égalité tend vers D, ainsi qu'on l'a vu [formule (8)].

En second lieu, Q se présente sous la forme d'une somme alternée dont les termes décroissent visiblement en valeur absolue. On a donc

$$0 < Q < \frac{1}{1(4p+1)} + \ldots + \frac{1}{(4p+1)1}.$$

La somme qui figure dans le dernier membre des inégalités précédentes peut s'écrire

$$\frac{1}{(2p+1)}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4p+1}\right).$$

Elle tend donc vers zéro, quand p augmente indéfiniment. Il en est par suite de même de Q.

On a donc, en résumé,

$$B^2 = \frac{\pi^2}{16} = D, \tag{10}$$

ce qui, rapproché de la formule (9), donne

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = A = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. Il résulte, comme on le voit, de l'égalité (10) et de la définition de D que l'on a

$$(11) \qquad \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+4m+3)(2n+4m+5)} = \frac{\pi^2}{64}.$$

Cette formule peut être généralisée de la façon suivante : posons

$$E_1 = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{2}{(1+2n)(3+2n+4m_1)(5+2n+4m_1)}$$

$$E_2 = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{2}{\left[\begin{array}{l}(1+2n)(3+2n+4m_1) \\ \quad \times(5+2n+4m_1+4m_2)(7+2n+4m_1+4m_2)\end{array}\right]}$$

et ainsi de suite.

E_1 n'est autre que $\frac{D}{2}$, et le mode de génération des sommes double, triple, etc., est suffisamment indiqué, E_p étant une somme multiple d'ordre $p+1$ (variables n, m_1, m_2, ..., m_p).

Cela posé, en se servant du développement de $\cos x$ en produit infini, il est facile de vérifier que l'on a

$$E_1 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad E_2 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \quad \ldots, \quad E_p = \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1}.$$

Il serait intéressant de démontrer directement la formule de récurrence

$$E_p = \frac{1}{p+1}\,\frac{\pi}{4}\,E_{p-1}.$$

Par ailleurs, on pourrait, comme autre généralisation

de la formule (11), chercher des formules de sommation pour les séries doubles ayant comme terme général

$$u_{m.n} = \frac{1}{(am - bn - c)(a'm + b'n + c')(a''m - b''n - c'')},$$

$a, b, \ldots, c''$ étant des constantes *a priori* quelconques.

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie; par *F. G. M.* — 5e édition; 1 vol. in-8 de XXIV-1298 pages, chez A. Mame et fils, à Tours, et J. de Gigord, à Paris.

Les nombreuses éditions de ce Livre attestent son succès. Celle-ci se distingue des précédentes par l'introduction de questions nouvelles et par des notes biographiques et bibliographiques qui donnent au livre de l'attrait.

Les exercices de F. G. M. constituent sans doute un des plus riches recueils de problèmes géométriques qu'il y ait au monde, et sont, pour les professeurs, une mine précieuse d'énoncés.

Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della Geometria descrittiva; par *Gino Loria*. — 1 vol. de XV-235 pages (en langue italienne); chez Ulrico Hoepli, à Milan. Prix : 1 lire 50.

Cet Ouvrage fait partie de la Collection bien connue des *Manuali Hoepli*. Il fait suite à un traité de Géométrie descriptive du même auteur, et a pour but d'illustrer les méthodes générales par des applications aux polyèdres, aux courbes et aux surfaces. Il est illustré de 62 figures fort claires.

L'usage est en France d'étudier à part la représentation par projections orthogonales (méthode de Monge) et la représen-

tation par projection centrale ou perspective. A l'étranger, on aborde volontiers les deux méthodes simultanément, et le savant professeur de Gênes se confirme à cette conception de la Géométrie descriptive, plus large peut-être que la nôtre. Il emploie surtout les deux plans de projection classiques, mais plusieurs problèmes sont traités par la perspective.

La première Partie de l'Ouvrage est consacrée aux figures limitées par des plans et des droites (résolution de trièdres, polyèdres); la seconde Partie aux courbes (courbes planes, courbes gauches, étude particulière de l'hélice); la troisième Partie aux surfaces (surface de révolution, hélicoïdes, cônes et cylindres, surfaces réglées développables et gauches).

La première Partie n'exige que la connaissance de la Géométrie élémentaire, les deux dernières Parties font appel à des notions d'un ordre plus élevé. L'auteur a pris soin de résumer les principales propositions dont il avait à faire usage.

Le Livre de M. Gino Loria, très intéressant en lui-même, fait, en outre, connaître des points de vue et des modes d'exposition qui diffèrent notablement des nôtres. Nous pensons qu'il sera lu avec profit par les professeurs de Géométrie descriptive.

NUEVOS METODOS PARA RESOLVER ECUACIONES NUMERICAS; par *José Isaac del Corral.* — 1 vol. in-8 de XXII-303 pages (en langue espagnole); chez Adrian Romo, à Madrid. Prix : 7 pesetas.

Les méthodes de résolution numérique proposées par l'auteur reposent sur l'emploi d'une fonction auxiliaire qu'il appelle *eulérienne*, et qui se déduit du polynome

$$f(x) = a_0 x^m + \ldots + a_m$$

par la formule

$$Ef(x) = mf(x) - f'(x) = -x^{m+1}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^m}f(x)\right].$$

La considération de l'eulérienne conduit à une série de théorèmes sur les équations algébriques, entièrement analogues, ainsi qu'on peut s'y attendre, aux théorèmes de Rolle,

de Budan, de Sturm, etc. L'auteur applique aussi les eulériennes au calcul numérique des racines réelles et imaginaires.

Les nouvelles méthodes sont-elles supérieures aux anciennes? Au lecteur d'en juger. En tout cas, il rendra justice à l'érudition et au talent d'exposition de M. del Corral.

R. B.

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

Épreuve écrite. — 1° *Démontrer la propriété fondamentale des lignes géodésiques d'une surface, et former leur équation différentielle; en coordonnées curvilignes* (*uv*), *l'élément linéaire étant donné sous la forme*

$$ds^2 = f^2 du^2 + 2fg \cos\omega . \, du\, dv + g^2 dv^2;$$

2° *Définir l'angle de contingence géodésique et la courbure géodésique; faire voir que celle-ci ne diffère pas de la courbure tangentielle;*

3° *Donner l'intégrale première de l'équation des lignes géodésiques dans le cas où les lignes coordonnées* (u, v) *forment un système de Liouville. Application aux surfaces de révolution et à l'hélicoïde gauche.*

(Juillet 1911.)

Épreuve écrite. — 1° Question de cours : *Une surface étant rapportée à ses lignes de courbure et le* $\overline{ds^2}$ *ayant pour expression* $f^2 du^2 + g^2 dv^2$, *former les relations qui existent entre les coefficient* f, g *et les courbures principales* $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$; *quelles conditions doivent remplir* $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ *pour que les lignes de courbure soient isothermes?*

2° Application : *Démontrer que, en dehors des surfaces canaux et des surfaces de révolution, les seules enveloppes*

de sphères (à un paramètre) qui soient divisées en carrés par leurs lignes de courbure sont définies de la manière suivante : la sphère enveloppée reste orthogonale à une sphère fixe et son centre décrit une courbe située tout entière dans un plan passant par le centre de cette sphère fixe. (Novembre 1911.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2090.

(1908, p. 96.)

Soient P (α, β, γ) *un point fixe quelconque situé dans le plan du triangle* ABC : θ *le centre de la conique inscrite en* α, β, γ ; $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *la polaire de* θ *dans le triangle* ABC *et* Q *la conique inscrite en* ABC *au triangle des droites* $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. *Si un point* O (x, y, z) *décrit* Q :

1° *La polaire* ρ *de* O *tourne autour de* θ ;

2° *Le centre* θ_1 *de la conique inscrite à* ABC *en* x, y, z *décrit la polaire* ρ_1 *de* P ;

3° *Les parallèles à* PA, PB, PC *menées par* O *coupent* BC, CA, AB, *en* λ', μ', ν' *et l'on a la droite* $\Delta'(\lambda' \mu' \nu')$;

4° *Les parallèles à* OA, OB, OC *menées par* P *coupent* BC, CA, AB *en* λ_1, μ_1, ν_1 *et l'on a la droite* $\Delta_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$;

5° *Le point* $\omega(\Delta'_1 \Delta_1)$ *est le milieu de* OP *et décrit la conique* V *qui passe par les milieux des côtés de* ABC *et les points* α, β, γ ;

6° *Si* P *coïncide avec l'orthocentre* H *de* ABC, θ *est le point de Lemoine,* Q *le cercle* ABC, Δ' *la droite de Simson et* V *le cercle d'Euler.* (Sondat.)

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Il suffit d'établir les propositions précédentes dans le cas où le point P coïncide avec l'orthocentre H du triangle ABC, et

de les généraliser au moyen d'une transformation homographique laissant invariable la droite de l'infini.

Dans ce cas, le point θ est le point de concours des médianes antiparallèles, c'est-à-dire le point de Lemoine du triangle, les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont les tangentes au cercle circonscrit en A, B, C, cercle qui n'est autre que la conique Q.

1° Soient u, v, w les points d'intersection de la polaire ρ d'un point O du cercle circonscrit avec BC, CA, AB; si l'on se donne le point u, les points v et w sont déterminés et uniquement; si, d'autre part, ce point u coïncide avec B par exemple, il en est de même du point w, ce qui montre que ρ passe par un point fixe. Si u coïncide avec λ, ρ devient la symédiane issue de A; le point fixe cherché est donc le point de Lemoine θ.

2° Si l'on se donne le point de contact d'une des coniques (θ_1) avec l'un des côtés du triangle ABC, cette conique est déterminée et uniquement. Les coniques (θ_1) forment, par suite, un faisceau tangentiel dont les points limites (coniques évanouissantes) sont (A, λ), (A, μ), (C, ν), le lieu de leurs centres est donc la droite $\omega_1\omega_2\omega_3$, ω_1, ω_2, et ω_3 étant les milieux des segments $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. Si M′ et M″ sont les milieux de CA et AB, on a visiblement $\omega_1 M' . \omega_1 M'' = \overline{\omega_1 A^2}$; les points ω_1, ω_2, ω_3 appartiennent, par suite, à l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points, c'est-à-dire à l'axe orthique, polaire de H.

3° Nous tombons sur le théorème de Simson.

4° Soit O′ le point diamétralement opposé à O sur le cercle ABC; les pôles des droites AO′, BO′, CO′ par rapport au cercle conjugué au triangle sont les points d'intersection des côtés de celui-ci avec les parallèles menées par H aux droites AO, BO, CO; ces points λ', μ', ν' sont sur la polaire Δ' de O′ par rapport au cercle conjugué au triangle. Soit ω le point d'intersection de Δ' avec OO′, on a

$$H\omega . HO' = HA . HH_1 = \frac{1}{2} HO . HO$$

(H_1 étant le pied de la hauteur issue de HA), d'où $H\omega = \frac{1}{2} HO$.

5° Le point ω étant le milieu de OH est le point de concours des droites Δ et Δ' et il décrit visiblement le cercle de neuf points.

2103.

(1908, p. 479.)

Étant données 4 sphères C_1, C_2, C_3, C_4 *de centres* O_1, O_2, O_3, O_4, *une sphère quelconque* Σ *coupe les axes radicaux* IA_1, IA_2, IA_3, IA_4 *de ces sphères prises* 3 *à* 3 *en* A_1, A'_1, A_2 A'_2, A_3, A'_3, A_4, A'_4. *Les quatre points* A_1, A_2, A_3 A_4, *sont les centres radicaux de* C_1, C_2, C_3, C_4 *prises* 3 *à* 3 *avec une sphère* S. *De même* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *sont les centres radicaux de* C_1, C_2, C_3, C_4 *prises* 3 *à* 3 *avec une sphère* S'.

1° *Montrer que* S *et* S' *peuvent se déduire l'une de l'autre de la façon suivante : leurs centres* ω *et* ω' *sont deux points inverses par rapport au tétraèdre* $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$ *et la somme des puissances du point* I *par rapport à ces deux sphères reste constante quand* Σ *varie.*

2° *Montrer qu'il y a une surface lieu des points* ω *et* ω' *tels que* S *et* S' *soient orthogonales quel que soit le rayon arbitraire attribué à l'une d'elles et étudier cette surface.*

(GILBERT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

1° Prenons le point I comme origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires : soient

$$C_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des sphères C,

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

la sphère Σ et enfin

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + t_1 = 0,$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 + t_2 = 0$$

les sphères S et S'.

Soit

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

nous désignerons par U_i, V_i, W_i, Δ_i, les coefficients de α_i, β_i, γ_i, 1 (pris dans la ligne i) dans le développement de D.

L'axe radical des sphères C_2, C_3, C_4 a pour équations $\frac{x}{U_1} = \frac{y}{V_1} = \frac{z}{W_1}$ et l'équation aux ρ des points d'intersection de cette droite avec Σ sera

$$\rho^2(U_1^2 + V_1^2 + W_1^2) - 2\rho(aU_1 + bV_1 + cW_1) + d = 0.$$

Soient ρ_4, ρ'_4 les racines de cette équation correspondant aux points A_4 et A'_4. Le point A_4 sera le centre radical des sphères C_2, C_3, C_4 et S si l'on a

$$\begin{aligned} &- 2\rho_4(\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1) + \delta \\ &= - 2\rho_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1) + t_1 \end{aligned}$$

ou puisque $\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 + \Delta_1 = 0$,

$$(1) \qquad 2\rho_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) = t_1 - \delta;$$

nous aurons, de même, si A'_4 est le centre radical de C_2, C_3, C_4, S',

$$(2) \qquad 2\rho'_4(x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = t_2 - \delta;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} &4\rho_4\rho'_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) \\ &\quad \times (x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = (t_1 - \delta)(t_2 - \delta) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\frac{(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1)(x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1)}{U_1^2 + V_1^2 + W_1^2} \\ &= \frac{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)}{4d}; \end{aligned}$$

le premier membre représente le produit des distances des points ω et ω' au plan $O_2\,O_3\,O_4$, on voit de même que le pro-

duit des distances de ces deux points aux plans $O_1 O_3 O_4$, $O_1 O_2 O_4$, $O_1 O_2 O_3$ est égal à $\frac{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}{4d}$, ce qui prouve que ces points sont inverses par rapport au tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Des relations (1) et (2) on déduit la suivante :

$$U_1\left(\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}\right)+V_1\left(\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}\right)$$
$$+W_1\left(\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}\right)+\Delta_1\left[\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho'_4}\right)=\frac{aU_1+bV_1+cW_1}{d}$$

ou

$$U_1\left(\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}-\frac{a}{d}\right)+V_1\left(\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}-\frac{b}{d}\right)$$
$$+W_1\left(\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}-\frac{c}{d}\right)+\Delta_1\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}=0.$$

Si entre cette relation et les trois relations analogues nous éliminons

$$\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}-\frac{a}{d},$$
$$\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}-\frac{b}{d},$$
$$\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}-\frac{c}{d},$$

il vient, en désignant par Δ le déterminant adjoint du déterminant D,

$$\Delta\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}=0,$$

D étant par hypothèse non nul, puisque les points O_1, O_2, O_3, O_4 ne sont pas dans un même plan, Δ n'est pas nul et l'on a

$$t_1+t_2-2\delta=0,$$

ce qui montre que la somme des puissances du point I par rapport à S et S′ est constante.

3° Si les sphères S et S' sont orthogonales, on aura

$$(1)\qquad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \delta.$$

si nous désignons par

$$P_i = x\cos\alpha_i + y\cos\beta_i + z\cos\gamma_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les faces du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, nous aurons, les points ω et ω' étant inverses par rapport à ce tétraèdre,

$$(2)\qquad x_2\cos\alpha_i + y_2\cos\beta_i + z_2\cos\gamma_i - p_i = \frac{\lambda}{x_1\cos\alpha_i + y_1\cos\beta_i + z_1\cos\gamma_i - p_i};$$

éliminons x_2, y_2, z_2, λ entre les relations (1) et (2), ces relations étant symétriques en $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$ le résultat de l'élimination sera la surface lieu *des points* ω *et* ω' telle que les sphères S et S' soient orthogonales. Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & \dfrac{1}{P_1} & p_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \dfrac{1}{P_2} & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & \dfrac{1}{P_3} & p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & \dfrac{1}{P_4} & p_4 \\ x & y & z & 0 & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma P_2P_3P_4 \begin{vmatrix} \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & p_4 \\ x & y & z & \delta \end{vmatrix} = 0;$$

le lieu cherché est une surface du quatrième ordre passant par les arêtes du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$.

Remarques. — On a

$$\overline{I\omega}^2 + \overline{I\omega'}^2 - R_1^2 - R_2^2 = 2\delta.$$

et si les sphères S et S′ sont orthogonales

$$\overline{\omega\omega'}^2 = R_\omega^2 + R_{\omega'}^2,$$

ce qui donne

$$\overline{I\omega}^2 + \overline{I\omega'}^2 - \overline{\omega\omega'}^2 = 2\delta$$

ou encore

$$I\omega\, I\omega' \cos\widehat{\omega I \omega'} = \delta,$$

les points ω et ω' étant inverses par rapport au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, cette dernière relation donne une définition géométrique de la surface lieu de ω et ω' (surface qui est visiblement anallagmatique dans l'inversion tétraédrique).

On peut étudier la surface au moyen de cette relation, qui peut s'écrire, en appelant ω'_1 la projection de ω' sur $I\omega$,

$$I\omega\, I\omega'_1 = \delta.$$

On voit donc que, si ω est un point de la surface, son inverse par rapport au point I, la puissance d'inversion étant δ, étant ω'_1, le plan perpendiculaire à $I\omega$ en ω'_1 passe par le point ω' inverse de ω par rapport au tétraèdre.

Cette remarque permet, par exemple, de déterminer immédiatement les droites autres que les arêtes du tétraèdre suivant lesquelles la surface considérée coupe les faces de celui-ci. Sur la face $O_2O_3O_4$ par exemple c'est l'intersection de cette face avec le plan perpendiculaire à O_1I au point O'_1 tel que $O_1I.O'_1I = \delta$.

QUESTIONS.

2191. On considère un rectangle variable ABCD circonscrit à une ellipse dont l'un des foyers est F.

Le centre du cercle circonscrit au triangle FAB, son orthocentre et le centre de son cercle des neuf points ont pour lieux des cercles.

E.-N. Barisien.

[M¹3e, M²2c]

EXTENSION DES THÉORÈMES DE FRÉGIER AUX COURBES ET AUX SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

---

1. On joint le sommet M d'un triangle MAB à un point S du côté AB; les droites menées par les sommets A et B, parallèles respectivement aux côtés opposés, rencontrent MS aux points A_1, B_1. On a

$$(a) \qquad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1}.$$

Soient X le point (AA_1, BB_1), O le milieu de AB, S′ le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par X au côté AB. On a

$$(A_1 B_1 M S') = (A B O \infty) = -1$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{2}{MS} = \frac{1}{MS}.$$

Soient A_2 le point d'intersection de MS avec la perpendiculaire élevée au point A sur MA; a, b, n les semi-droites MA, MB, MS; on a

$$MA = MA_2 \cos(na), \qquad MA : \sin(bn) = MA_1 : \sin(ba),$$

donc

$$(b) \qquad MA_1 = MA_2 \frac{\cos(na)\sin(ab)}{\sin(nb)}.$$

---

(1) FRÉGIER, *Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. VI, p. 229 et 231; t. VII, p. 91.

2. On joint le sommet M d'un tétraèdre MABC à un point S de la face ABC; les plans α, β, γ menés par les sommets A, B, C respectivement parallèles aux faces opposées rencontrent MS aux points A_1, B_1, C_1; on a

$$(c) \qquad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

Soient S', B', C' respectivement les points (BC, AS), (β, MS'), (γ, MS'); S'' le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par S' à MA; les droites $B'B_1$, $C'C_1$ sont aussi parallèles à MA. On a, d'après l'égalité (a),

$$\frac{1}{MS'} = \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{MS''} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1},$$

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MS''} + \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

On désigne par y, z deux semi-droites faisant avec la semi-droite $x \equiv MS$ un trièdre trirectangle; par a, b, c les semi-droites MA, MB, MC; par $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ les cosinus directeurs de a, b, c relativement au trièdre xyz. Le plan α a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - MA.\alpha_1 & y - MA.\beta_1 & z - MA.\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0;$$

par suite,

$$MA_1 = MA \frac{\sin(abc)}{\sin(xbc)}.$$

Le plan mené par A perpendiculairement à MA coupe MS en A_2; on a

$$MA = MA_2 . \alpha_1,$$

donc

$$(d) \qquad \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_2} \frac{\sin(abc)}{\alpha_1} \frac{1}{\sin(abc)}.$$

Un cône du second ordre ayant pour trièdre principal xyz a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Le trièdre *abc* est conjugué à ce cône si l'on a

$$A\alpha_1\alpha_2 + B\beta_1\beta_2 + C\gamma_1\gamma_2 = 0,$$
$$A\alpha_1\alpha_3 + B\beta_1\beta_3 + C\gamma_1\gamma_3 = 0.$$
$$A\alpha_2\alpha_3 + B\beta_2\beta_3 + C\gamma_2\gamma_3 = 0.$$

De ces égalités on déduit

$$A\alpha_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) = B\beta_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3),$$
$$A\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = C\gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$

ou

$$(e)\quad \frac{\sin(xca)}{\alpha_2} = \frac{A}{B}\frac{\sin(yca)}{\beta_2}, \qquad \frac{\sin(xab)}{\alpha_3} = \frac{A}{C}\frac{\sin(zab)}{\gamma_3}.$$

Les égalités (e) et leurs analogues donnent

$$(f)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(xbc)}{\sin(ybc)}\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\sin(xca)}{\sin(yca)}\dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \dfrac{\sin(xab)}{\sin(yab)}\dfrac{\beta_3}{\alpha_3} = \dfrac{A}{B}, \\ \dfrac{\sin(xbc)}{\sin(zbc)}\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} = \dfrac{\sin(xca)}{\sin(zca)}\dfrac{\gamma_2}{\alpha_2} = \dfrac{\sin(xab)}{\sin(zab)}\dfrac{\gamma_3}{\alpha_3} = \dfrac{A}{C}. \end{cases}$$

Ces relations constituent pour le trièdre principal du cône la propriété analogue à celle exprimée par la relation

$$\text{tang}(ax)\,\text{tang}(a'x) = \text{const.}$$

pour le couple rectangulaire xy d'une involution de rayons. On peut écrire ces relations sous la forme

$$\frac{\sin(xbc)}{\sin(ybc)}\frac{\sin(axz)}{\sin(ayz)} = \frac{\sin(xca)}{\sin(yca)}\frac{\sin(bxz)}{\sin(byz)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(yab)}\frac{\sin(cxz)}{\sin(cyz)},$$
$$\frac{\sin(xbc)}{\sin(zbc)}\frac{\sin(axy)}{\sin(azy)} = \frac{\sin(xca)}{\sin(zca)}\frac{\sin(bxy)}{\sin(bzy)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(zab)}\frac{\sin(cxy)}{\sin(czy)}.$$

Elle sont alors applicables à deux trièdres conjugués quelconques.

3. *Deux cordes p, q issues dun point* M *d'une courbe algébrique d'ordre n et conjuguées dans une involution rencontrent la courbe aux points* P_1, P_2, ..., P_{n-1}; Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}. *Les droites* P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$ *déterminent sur la conjuguée n de la tangente en* M, *dans l'involution considérée, les points* X_1, X_2, ..., X_{n-1}. *Le conjugué harmonique de* M *relativement au système de points* X *est un point* S *indépendant du couple pq choisi dans l'involution.*

Soient A, B les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q. La droite AB est la droite polaire du point M par rapport au système de droites P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$, et le point $S \equiv (n, AB)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points X_1, X_2, ..., X_{n-1}. Les points A, B appartiennent à la conique polaire du point M relativement à la courbe algébrique considérée et le point S est le pôle de l'involution déterminée sur cette conique par les couples pq. Le point S est donc indépendant du couple choisi pq.

4. *Les parallèles menées par les points* P_1, P_2, ..., P_{n-1}, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} *respectivement aux droites q et p déterminent sur la droite n les points* P'_1, P'_2, ..., P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{n-1}; *on a*

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1}, \tag{1}$$

car si les parallèles menées par les points A, B respec-

tivement à q et p coupent la droite n en A' et B', on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \qquad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ_1}.$$

Mais, d'après l'égalité (a), on a

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} - \sum \frac{1}{MQ'_1}.$$

Ainsi symétrique de M par rapport au point S est le conjugué harmonique de M relativement au système de points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-1}$; $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{n-1}$.

5. *Au point* M *d'une courbe algébrique on mène deux cordes p, q conjuguées dans une involution dont le couple rectangulaire est formé par la tangente et la normale n au point* M. *Si* R *est le rayon de courbure de la courbe au point* M; $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, *les segments comptés à partir de* M *et déterminés sur la normale n par la courbe considérée;* S *la conjuguée harmonique de* M *par rapport aux points* X_1, $X_2, \ldots, X_{n-1}$ (3); *on a*

$$(2) \quad \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots + \frac{1}{X_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R}$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale n avec la perpendiculaire élevée au point P_1 sur p. L'égalité (b) permet de remplacer la relation (1) par la suivante :

$$\sin(pq)\frac{n-1}{MS} = \operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)\frac{\cos(nq)}{\sin(np)}\sum\frac{1}{MP_1} - \frac{\sin(np)}{\cos(nq)}\sum\frac{1}{MQ''_1}.$$

Dans l'involution considérée au point M le produit tang (np). tang (nq) est constant, et si dans la précédente égalité on substitue au couple pq la tangente et la normale au point M, l'un des points $P''_1, P''_2, \ldots, P''_{n-1}$ est l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en M et les autres sont à l'infini. Quant aux points Q''_1, $Q''_2, \ldots, Q''_{n-1}$, ce sont les points de rencontre de la normale avec la courbe. On a d'ailleurs dans cette hypothèse

$$\cos(nq) = 1, \qquad \sin(pq) = -\sin(np) = 1,$$

donc

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R}.$$

6. Si N' est le segment déterminé par la conique polaire du point M sur la normale n, R' le rayon de courbure de cette conique en M, on a, d'après la formule (2),

$$\frac{1}{N'} - \frac{1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R'}.$$

Mais

$$\frac{n-1}{N'} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

donc

$$R' = (n-1)R.$$

Si R_h représente le rayon de courbure au point M d'une courbe polaire d'ordre $n-h$ de ce point, on a de même

$$R' = (n-h-1)R_h;$$

par suite,

$$\frac{1}{R_h} = \frac{n-h-1}{n-1}\,\frac{1}{R}.$$

Ainsi : *En un point d'une courbe algébrique, les*

courbures des polaires successives de ce point forment une progression arithmétique [1].

7. Si l'involution considérée (pq) est orthogonale on a

$$\frac{n-1}{\text{MS}} = \frac{1}{2\text{R}} + \frac{1}{\text{X}_1} + \frac{1}{\text{X}_2} + \ldots + \frac{1}{\text{X}_{n-1}} \quad [2].$$

On conclut de là : *Si la conique polaire de* M *est une hyperbole équilatère, on a*

$$\frac{1}{2\text{R}} + \frac{1}{\text{X}_1} + \frac{1}{\text{X}_2} + \ldots + \frac{1}{\text{X}_{n-1}} = 0,$$

car le point S est alors à l'infini. Dans cette hypothèse on a aussi

$$\sum \frac{1}{\text{MP}_1^2} - \sum \frac{1}{\text{MQ}_1} = 0.$$

8. *Les arêtes a, b, c d'un trièdre ayant son sommet en un point* M *d'une surface algébrique d'ordre n, et conjugué à un cône donné, rencontrent cette surface aux points* P_1, P_2, ..., P_{n-1} ; Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} ; R_1, R_2, ..., R_{n-1}. *Les plans* $\text{P}_1\text{Q}_1\text{R}_1$, $\text{P}_2\text{Q}_2\text{R}_2$, ..., $\text{P}_{n-1}\text{Q}_{n-1}\text{R}_{n-1}$ *déterminent sur le rayon polaire x du plan tangent en* M, *relativement au cône considéré, les points* X_1, X_2, ..., X_{n-1}. *Le conjugué harmonique de* M *relativement au système de points* X *est un point* S *indépendant du trièdre conjugué choisi.*

---

[1] Moutard, *Nouv. Ann. de Math.*, 1860, p. 195. — C. Servais, *Bull. Acad. Belgique*, 1891, p. 364.

[2] Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, 1886, n° 362. Cette formule, établie par Poncelet à l'aide d'autres considérations, met en évidence la propriété (3) pour une involution orthogonale et par projection pour une involution quelconque.

Soient A, B, C les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q, R. Le plan ABC est le plan polaire de M par rapport au système de plans $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$, ..., $P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1}$ et le point $S \equiv (x, ABC)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points X_1, X_2, ..., X_{n-1}. Les points A, B, C appartiennent à la quadrique polaire du point M relativement à la surface algébrique considérée; donc, d'après le théorème de Frégier, le point S est indépendant du trièdre conjugué *pqr* choisi.

9. *Les plans menés par les points* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, *parallèles respectivement aux plans bc, ca, ab déterminent sur la droite x les systèmes de points* $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-1}$, $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{n-1}$, $R'_1, R'_2, \ldots, R'_{n-1}$; *on a*

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}. \tag{3}$$

Car si les plans menés par A, B, C parallèles respectivement à *bc*, *ca*, *ab* déterminent sur la droite x les points A', B', C', on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \quad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ'_1}, \quad \frac{n-1}{MC'} = \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Mais d'après l'égalité (c),

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Ainsi : *Si* $MM' = 3\,MS$, *le point* M' *est le conjugué harmonique de* M *relativement au système de*

points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{n-1}, R'_1, R'_2, \ldots,$ R'_n .

10. *Si* a, b, c *est un trièdre conjugué à un cône dont le trièdre principal est formé par la normale* x *et deux tangentes rectangulaires* y *et* z *au point* M *de la surface*; R, R′ *les rayons de courbure des sections normales* xy, xz *au point* M; $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ *les segments comptés à partir de* M *et déterminés sur la normale* x *par la surface*; S *le conjugué harmonique de* M *par rapport aux points* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ (8), *on a*

$$\frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)}\,\frac{n-1}{\text{MS}} = \frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}\right) + \frac{\cos(ya)}{\sin(ybc)}\,\frac{1}{2R} + \frac{\cos(za)}{\sin(zbc)}\,\frac{1}{2R'}.$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale x avec le plan mené par P_1 normalement à la droite a. L'égalité (d) permet de remplacer la relation (3) par la suivante :

$$(n-1)\frac{\sin(abc)}{\text{MS}} = \frac{\sin(xbc)}{\alpha_1}\sum\frac{1}{\text{MP}''_1} + \frac{\sin(xca)}{\alpha_2}\sum\frac{1}{\text{MQ}''_1} + \frac{\sin(xab)}{\alpha_3}\sum\frac{1}{\text{MR}''_1}.$$

D'après les égalités (e) cette relation peut s'écrire

$$(n-1)\frac{\sin(abc)}{\text{MS}} = \frac{\sin(xbc)}{\alpha_1}\sum\frac{1}{\text{MP}''_1} + \frac{A}{B}\,\frac{\sin(yca)}{\beta_2}\sum\frac{1}{\text{MQ}''_1} + \frac{A}{C}\,\frac{\sin(zab)}{\gamma_3}\sum\frac{1}{\text{MR}''_1}.$$

Si dans cette égalité on substitue au trièdre abc le trièdre xyz, l'un des points Q''_1 et l'un des points R''_1 sont les extrémités des diamètres des cercles de cour-

bure des sections xy, xz et les autres points Q'', R'' sont à l'infini. Quant aux points P''_1, P''_2, ., . ce sont les points de rencontre de la normale avec la surface. On a d'ailleurs, dans cette hypothèse,

$$\sin(abc) = \sin(xbc) = \sin(yca) = \sin(zab),$$
$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1;$$

par suite,

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{A}{B}\frac{1}{2R} + \frac{A}{C}\frac{1}{2R'}.$$

En remplaçant $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$ par leurs valeurs (égalités f), on a

$$\frac{\alpha_1}{\sin(xbc)}\frac{n-1}{MS} = \frac{\alpha_1}{\sin(xbc)}\sum\frac{1}{N_1}$$
$$+ \frac{\beta_1}{\sin(ybc)}\frac{1}{2R} + \frac{\gamma_1}{\sin(zbc)}\frac{1}{2R'}.$$

11. Si le trièdre a, b, c est trirectangle on a

$$A = B = C,$$

et l'on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'},$$

égalité qu'on peut déduire immédiatement de

$$\frac{n-1}{MS} = \sum\frac{1}{MP'_1} + \sum\frac{1}{MQ'_1} + \sum\frac{1}{MR'_1}.$$

Le cône de sommet M étant isotrope, deux tangentes rectangulaires quelconques et la normale en M à la surface algébrique forment un trièdre conjugué à ce cône. De là l'égalité connue

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

En particulier, si R_1, R_2 sont les rayons de courbure

principaux, on a

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}} = \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}} + \frac{1}{2\,\mathrm{R}_1} + \frac{1}{2\,\mathrm{R}_2}.$$

Corollaires. — *Si au point* M *la courbure moyenne est nulle, on a*

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}} = \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}}.$$

Si la quadrique polaire de M *est un hyperboloïde équilatère, on a*

$$\frac{1}{2\,\mathrm{R}_1} + \frac{1}{2\,\mathrm{R}_2} + \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}} = 0.$$

12. *Si les points* S_1, S_2 *sont les points* S (3) *relatifs au point* M *pour deux sections normales de la surface en* M *et perpendiculaires entre elles, on a*

$$\frac{1}{\mathrm{MS}_1} + \frac{1}{\mathrm{MS}_2} = \text{const.}$$

Car, soient R et R′ les rayons de courbure au point M de ces sections, on a (7, 11)

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}_1} = \frac{1}{2\,\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}},$$

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}_2} = \frac{1}{2\,\mathrm{R}'} + \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}},$$

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}} = \frac{1}{2\,\mathrm{R}} + \frac{1}{2\,\mathrm{R}'} + \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}};$$

donc

$$\frac{n-1}{\mathrm{MS}_1} + \frac{n-1}{\mathrm{MS}_2} = \frac{n-1}{\mathrm{MS}} + \frac{1}{\mathrm{N}_1} + \frac{1}{\mathrm{N}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}_{n-1}} = \text{const.}$$

Corollaires. — *Le point* S *relatif au point* M *pour la section normale à une tangente inflexion-*

nelle de la surface en M *est identique au point* S *relatif au point* M *pour la surface.*

Car si $R' = \infty$, on a

$$\frac{n-1}{MS_2} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

et, par suite,

$$MS_1 = MS.$$

Si la courbure moyenne est nulle au point M, *on a*

$$\frac{1}{MS_1} + \frac{1}{MS_2} = \frac{2}{MS}.$$

[O'6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES;

Par M. Maurice FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

(FIN.)

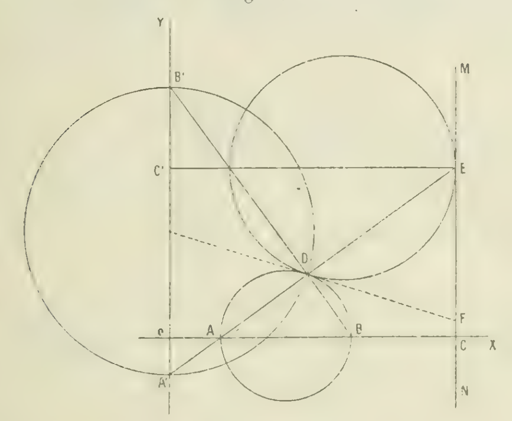
---

26. *Relations métriques.* — Désignons par a, b, c les abscisses respectives des trois points A, B, C, situés sur l'axe OX (*fig.* 5); par a', b', c' les ordonnées des points A', B', C', situés sur l'axe OY et qui jouent les mêmes rôles dans l'une des cyclides de la seconde famille; enfin par a'', b'', c'' les cotes des points analogues A'', B'', C'', situés sur l'axe OZ et correspondant à l'une des cyclides de la troisième famille.

1° Tous les cercles de diamètre A'B', étant orthogo-

naux au cercle AB et à son symétrique par rapport à OY, admettent l'axe OX pour axe radical, et de plus

Fig. 5.



la puissance commune au point O par rapport à tous ces cercles a la même valeur absolue que celle de ce même point O par rapport au cercle AB, mais le signe contraire :

$$OA' \times OB' = -OA \times OB \quad \text{ou} \quad a'b' = -ab.$$

2° On a, par le théorème de Thales,

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{AE}{AA'} = \frac{AC}{AO},$$

ce qui prouve que le rapport $\frac{OC'}{OA'}$ reste invariable pour toutes les cyclides de la deuxième famille. On peut encore en déduire

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c-a}{-a},$$

qui, par multiplication avec l'équation précédente, donne

$$b'c' = bc - ab.$$

Il en résulte que les produits $a'b'$ et $b'c'$ restent constants pour toutes les cyclides de la deuxième famille. De même il y aura pour chaque famille deux produits analogues qui resteront invariables.

Posons

$$ab = m, \qquad bc = n. \tag{1}$$

On aura pour la seconde famille

$$a'b' = -m, \qquad b'c' = n - m. \tag{2}$$

On aura de même pour la troisième

$$a''b'' = m - n, \qquad b''c'' = -n. \tag{3}$$

Rappelons aussi que chacun des trois rapports

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}, \quad \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OA'}}, \quad \frac{\mathrm{OC''}}{\mathrm{OA''}} \tag{4}$$

est invariable.

Nous reviendrons plus loin sur les relations entre les valeurs de ces trois rapports.

On voit que le système orthogonal est complètement défini par les deux nombres m et n. Il est aussi défini, comme on vient de le voir, par une des trois coniques focales qui sont les lieux des points coniques, ce qui dépend aussi de deux paramètres.

27. *Cas particuliers.* — L'un des paramètres m ou n est remplacé dans l'une des deux autres familles par $m - n$ ou $n - m$. Les cas particuliers que nous voulons examiner sont ceux où l'un de ces paramètres est nul : $m = 0$, $n = 0$ ou $m = n$. Mais comme on peut toujours supposer que la famille qui a un paramètre nul est la première, et qu'on peut échanger les points A et B en considérant l'un ou l'autre des deux modes de génération de la cyclide par ses lignes de courbure cir-

culaires, il suffira de faire l'hypothèse

$$m = ab = 0.$$

Il peut alors se faire que ce soit le facteur a ou le facteur b qui soit nul.

Supposons d'abord

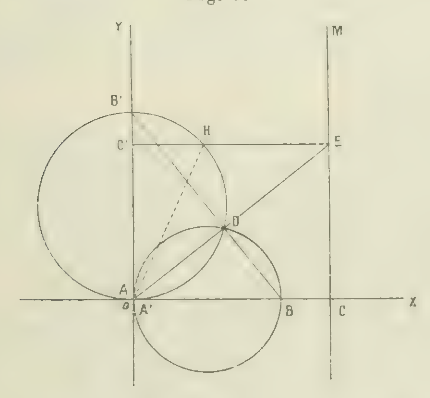
$$a = 0.$$

La figure 5 prend alors la disposition de la figure 6. On voit que le point A se confond avec le point A', ce qui est conforme à l'équation

$$a'b' = -m = 0.$$

Quant aux cyclides de la troisième famille on les obtient en remplaçant dans la construction le point A par le point C, l'axe OY par l'axe OZ, et la droite CM par l'axe OZ. La figure 6 prend alors la disposition de

Fig. 6.



la figure 7. On voit que A'' coïncide avec C'', ce qui est conforme aux équations (3) qui deviennent

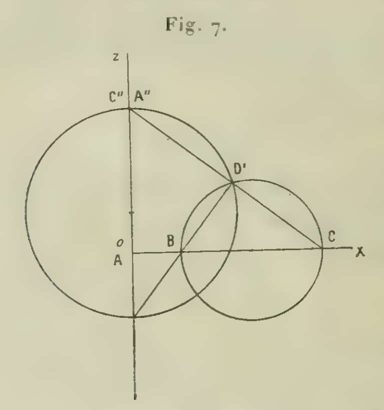
$$a''b'' = b''c'' = -n,$$

d'où

$$a'' = c'',$$

n n'étant pas nulle. C'est le point A″ qui est le centre de pivotement d'une des cyclides (C_3).

Fig. 7.



Alors les cyclides de la troisième famille, ayant leurs plans circonscrits confondus, se réduisent aux sphères orthogonales au cercle de diamètre BC situé dans le plan OXY et ayant leurs centres sur l'axe OZ, lesquelles passent nécessairement par un même cercle du plan OXY.

L'une des courbes focales est ce cercle de centre O situé dans le plan OXY, ce qu'on vérifie immédiatement sur la figure 6 où H est l'un des points coniques de la cyclide (C_2). On a $\overline{OH}^2 = OC'.\ OB' = b'c'$ qui est constant comme on l'a déjà vu.

Comme toutes les cyclides des deux premières familles doivent couper orthogonalement toutes les sphères du faisceau qui constitue la troisième, elles passent toutes par les deux sommets de ce faisceau qui sont ainsi deux points coniques communs à toutes ces cyclides. C'est à ces deux points situés sur l'axe OZ que se réduisent les deux autres focales.

On a

$$bc = b'c' = n.$$

Si n est positif, B et C sont du même côté de O qui coïncide avec A (*fig.* 6). Les cyclides des deux premières familles auront des points coniques imaginaires dans les plans autres que OXY, et dans ce plan-là les unes des points coniques imaginaires, les autres des points coniques réels, suivant que les points ABC ou A′B′C′ se succéderont dans l'ordre ABC ou ACB. Puisqu'il y a des points coniques réels, les sphères de la troisième famille coupent le plan OXY suivant un cercle réel. On reconnaîtra facilement que le rayon de ce cercle est égal à $\sqrt{n}$.

Si n est négatif, B et C sont de part et d'autre de A; les sphères coupent le plan OXY suivant un cercle imaginaire et les cyclides des deux autres familles ont toutes des points coniques réels sur l'axe OZ.

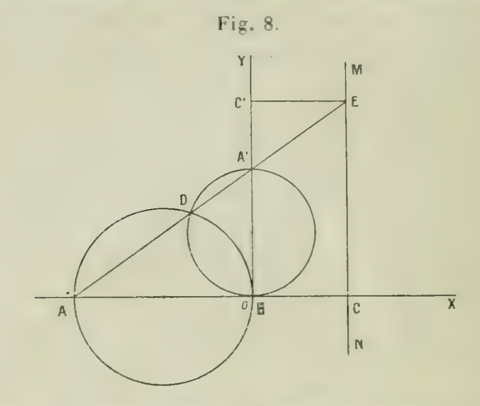
Si maintenant nous supposons $b = 0$, il résulte des équations (1) que m et n sont nulles, et par suite, en vertu des équations (2) et (3), b' et b''. Cela veut dire que toutes les cyclides du système passent par l'origine.

Dans la figure 5 il faut faire coïncider B avec O. Alors puisque le rapport $\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}$ est invariable, toutes les cyclides d'une même famille sont homothétiques et, cela étant vrai pour les trois familles, le système tout entier ne change pas si on lui fait subir une transformation homothétique avec O pour centre.

Une cyclide quelconque aura ses points coniques imaginaires si A et C sont de part et d'autre de B, et réels s'ils sont du même côté. A cause de l'homothétie, la même disposition se conservera dans toute une même famille, de sorte que chaque famille se compose soit de cyclides sans points coniques réels, soit de cyclides à points coniques réels sur un même axe radical.

Soient dans le plan OXY (*fig.* 8) les points A et C situés de part et d'autre de l'origine sur l'axe OX, et le

Fig. 8.



cercle de diamètre OA. Ce cercle et le point C définissent une cyclide de la première famille dont les points coniques sont imaginaires. Cette cyclide coupe le plan OYZ suivant deux droites OU et OU', et puisque toutes les cyclides de la première famille sont homothétiques par rapport au point O, elles passent toutes par ces deux droites comme cela doit être, puisqu'elles doivent couper le plan OYZ suivant une même conique réduite ici aux deux droites OU et OU'.

Si alors nous appliquons la construction du n° 23, il faudra mener par A une sécante quelconque ADE qui coupe le cercle en D et en E, la parallèle à OY menée par C. Le point A' est à l'intersection de DE avec OY, et le point C' est la projection de E sur OY. Alors l'une des cyclides de la deuxième famille sera définie par le cercle de diamètre A'B dans le plan OXY, et la droite EC'. Elle aura ses points coniques réels sur la perpendiculaire au plan OXY menée par A'; le lieu des points coniques des cyclides de cette seconde famille se composera des droites OU et OU'. Enfin, on verra de même

que les cyclides de la troisième famille auront également leurs points coniques réels sur les mêmes droites. En résumé, le système se composera d'une famille sans points coniques réels et de deux familles à points coniques réels.

Si l'on avait supposé la première famille à points coniques réels on arriverait à la même conclusion, car cela fût revenu à prendre pour première famille celle que nous appelons la deuxième.

28. *Relations entre les trois rapports.* — On arrive encore à la même conclusion en cherchant les relations entre les trois rapports

$$\frac{OC}{OA}, \quad \frac{OC'}{OA'}, \quad \frac{OC''}{OA''}.$$

Posons

$$\frac{OC}{OA} = h, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{OA}{OC} = \frac{1}{h}.$$

La figure 5 donne pour le cas général

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{AE}{AA'} = \frac{AC}{AO} = \frac{AO - OC}{AO} = 1 - h.$$

Pour la troisième famille, il faut remplacer C par A, c'est-à-dire h par $\frac{1}{h}$. On aura donc

$$\frac{OC''}{OA''} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Finalement on a pour les rapports correspondant aux trois familles :

$$h \quad \text{et} \quad \frac{1}{h},$$

$$1 - h \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-h},$$

$$\frac{h-1}{h} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h-1}.$$

Si l'on pose

$$h' = \frac{1}{1-h}, \qquad h'' = \frac{h-1}{h},$$

on aura

$$hh'h'' = -1,$$

ce qui montre qu'il y a au moins un rapport négatif : supposons que ce soit h. Alors h' et h'' sont positifs. Donc il y a toujours un rapport négatif et deux positifs.

Dans le cas particulier où l'origine est en B, à une valeur négative de h correspondent des cyclides sans points doubles réels et inversement. Donc, dans ce cas particulier, il y a une famille de cyclides sans points doubles réels et deux autres à points coniques réels.

29. *Systèmes réversibles composés de cônes et de cylindres.* — Il reste à signaler le cas où la représentation sphérique est la même pour toutes les surfaces d'une même famille et où le trièdre reste immobile quand on fait varier l'un des paramètres, w par exemple Alors, dans la variation de w, les plans tangents à chacune des deux surfaces $u =$ const. et $v =$ const. restent les mêmes, et la ligne correspondante est droite puisque sa tangente reste invariable. Chacune de ces deux surfaces est donc développable. De plus c'est un cône ou un cylindre de révolution puisque les lignes de courbure de l'autre famille doivent être circulaires. Finalement le système se compose de deux familles de cônes de révolution orthogonaux de même sommet et de sphères concentriques ayant leur centre au sommet commun, ou bien de deux familles de cylindres de révolution orthogonaux autour du même axe, et de plans passant par cet axe.

30. *Tous les systèmes orthogonaux composés de cyclides dérivent par inversion des systèmes réversibles.* — Observons d'abord que si l'on transforme par inversion un système réversible on obtiendra bien un système orthogonal composé de cyclides qui, en général, ne sera plus réversible. Je dis qu'on peut obtenir par ce moyen tous les systèmes orthogonaux composés de cyclides.

Soit en effet un pareil système. On a déjà vu au n° 18 que tout point conique d'une cyclide étant un cercle de rayon nul est aussi un point conique d'une cyclide d'une autre famille, et qu'il appartient, en qualité de point ordinaire, à toutes les cyclides de la troisième famille. Ces remarques, et les conclusions qu'on en tire que toutes les cyclides d'une même famille passent par une même courbe et que les trois courbes ainsi obtenues sont focales l'une de l'autre, s'appliquent aussi bien aux systèmes non réversibles.

Si l'on considère les deux cyclides qui se coupent orthogonalement le long d'un cercle voisin du point conique, les cônes qui leur sont circonscrits le long de ce cercle seront aussi orthogonaux. Ils sont de révolution autour de l'axe de leur cercle d'intersection. Donc, à la limite, les cônes des tangentes au point conique dans les deux cyclides seront des cônes de révolution supplémentaires, ayant par conséquent le même axe.

Soit S_1 (*fig.* 9) le point conique commun à deux cyclides (C_2) et (C_3) des deux dernières familles; S'_1 le deuxième point conique de la cyclide de la deuxième famille et S''_1 celui de la cyclide de la troisième famille. Nous supposons les droites $S_1S'_1$ et $S_1S''_1$ différentes. Soit aussi S_1X l'axe commun aux deux cônes des tangentes. Traçons les deux cercles SS'_1 et $S_1S''_1$ tangents

à S_1X. Chacun d'eux fait le même angle avec tous les cercles de la cyclide correspondante passant par S_1 et S'_1 ou par S_1 et S''_1. Nous les appellerons les *cercles axiaux*.

Par chaque cercle de (C_2) passant par S_1 et S'_1 passe une cyclide (C_1) de la première famille qui coupe (C_3) suivant un cercle passant par S_1 et S''_1 et orthogonal au précédent. Or, les deux cônes des tangentes, de sommet commun S_1 étant supplémentaires, deux génératrices perpendiculaires de ces deux cônes sont dans un même plan avec l'axe commun S_1X. Soit (ω_2) un cercle de (C_2) passant par S_1 et S'_1. Le plan passant par S_1X et la tangente en S_1 à (ω_2) coupe le cône des tangentes de (C_3) suivant deux génératrices dont une seule est perpendiculaire à la tangente à (ω_2). Au cercle (ω_2) correspond donc, sur la cyclide (C_3), un cercle unique (ω_3) passant par S_1 et S''_1 et tangent à cette génératrice, et il y a une cyclide (C_1) passant par (ω_2) et (ω_3).

Les deux cercles axiaux, étant tangents entre eux, sont situés sur une même sphère (Σ) qui peut du reste se réduire à un plan, et dont le plan tangent en S_1 passe par S_1X. Cette sphère, passant par les deux points coniques de chacune des deux cyclides (C_2) et (C_3), les coupe chacune suivant deux cercles (n° 13) : (ω'_2), (ω''_2); (ω'_3), (ω''_3) qui sont orthogonaux deux à deux, puisque le plan tangent à (Σ) passe par S_1X. Par exemple, (ω'_2) est orthogonal à (ω'_3) et (ω''_2) à (ω''_3). De plus, toujours parce que le plan tangent à la sphère (Σ) passe par S_1X, cette sphère est orthogonale en S_1 à chacun des deux cônes des tangentes, et par suite orthogonale à chacune des deux cyclides (C_2) et (C_3) tout le long des cercles (ω'). Il en résulte que la sphère (Σ) est doublement circonscrite à chacune

des deux cyclides (C_1) et (C'_1) qui passent, l'une par (ω'_2) et (ω'_3) et l'autre par (ω''_2) et (ω''_3). Mais une cyclide ne peut être circonscrite à une même sphère le long de deux cercles de courbure de familles différentes, sans se réduire à la sphère elle-même. Donc les deux cyclides (C'_1) et (C''_1) se réduisent à la sphère (Σ).

Ainsi, chacune des trois familles de cyclides comprend une sphère. Ces trois sphères sont orthogonales et chacune d'elles est orthogonale à toutes les cyclides de chacune des deux familles à laquelle elle n'appartient pas. Les lignes focales, lieux des points coniques, sont situés sur chacune de ces sphères.

Prenons alors pour pôle d'inversion l'un des points communs aux trois sphères. Celles-ci vont se transformer en trois plans rectangulaires, dont chacun est orthogonal à deux familles de cyclides. Ce seront donc des plans de symétrie. Les axes des cyclides devant leur être perpendiculaires seront parallèles aux arêtes du trièdre trirectangle formé par ces trois plans. Donc, la représentation sphérique du système sera celle du système réversible, et le système lui-même sera réversible, car, pour qu'un système soit réversible, il suffit que sa représentation sphérique le soit et que toutes les lignes de courbure soient des cercles (n° 5).

Il convient de remarquer que si les trois sphères ont leurs points communs imaginaires, l'inversion et le système réversible seront aussi imaginaires.

31. *Cas particuliers.* — Supposons maintenant que les trois points S_1, S'_1, S''_1 soient en ligne droite et que l'axe commun des deux cônes des tangentes de sommet S_1 soit la droite S_1X différente de S_1, S'_1, S''_1. Le cône des tangentes en S_1 est symétrique par rapport au plan de symétrie contenant l'axe radical $S'S'_1$. Donc

son axe OX est dans ce plan-là. Donc le plan (P) contenant les deux droites $S_1 S'_1 S''_1$ et $S_1 X$ est un plan de symétrie commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3), et les deux cercles axiaux sont dans ce plan-là qui remplace la sphère du numéro précédent. La conclusion n'est pas changée.

Admettons enfin que l'axe $S_1 X$ coïncide avec la droite $S_1 S'_1 S''_1$, et que cette particularité se présente pour deux cyclides quelconques des deux dernières familles, afin qu'on ne puisse pas refaire le raisonnement précédent en choisissant deux autres cyclides.

On voit alors immédiatement que les deux cercles axiaux sont remplacés par la droite $S_1 S'_1 S''_1$. Les cercles infiniment petits situés dans le voisinage de S_1 ont leurs plans parallèles, ce qui rejette à l'infini l'un des axes radicaux de la cyclide. Donc, toutes les cyclides des deux dernières familles sont de révolution, et il faut que ce soit autour du même axe, puisqu'elles se coupent suivant des parallèles. La troisième famille se compose des plans méridiens.

Si l'on fait une inversion quelconque, les plans méridiens deviennent des sphères passant par un cercle fixe et formant par conséquent un faisceau. Les parallèles deviennent les cercles orthogonaux aux sphères du faisceau. Ils passent donc tous par les deux sphères de rayon nul du faisceau, et toutes les cyclides des deux dernières familles ont deux points coniques communs. Il en était donc de même des cyclides primitives. Alors une inversion avec l'un de ces points coniques comme pôle donnera deux familles de cônes de révolution orthogonaux et les sphères concentriques, ce qui est bien encore un système réversible.

32. *Systèmes orthogonaux admettant une famille*

de sphères et deux familles de cyclides. — Si l'on fait l'inversion en partant d'un système réversible général, on trouvera un système orthogonal composé de trois familles de cyclides avec trois courbes focales situées sur trois sphères dont une, deux, ou les trois peuvent se réduire à des plans. Les seuls cas particuliers à considérer sont ceux où une ou deux familles se réduisent à des sphères ou à des plans. Au lieu de les faire dériver par inversion d'un système réversible, il est préférable de les étudier directement. D'abord, toutes les sphères d'une même famille forment un faisceau, puisque chacune d'elles est orthogonale à une infinité de sphères dont chacune est circonscrite à l'une des cyclides des deux autres familles. Ensuite tout cercle de courbure d'une cyclide quelconque doit être orthogonal à toutes les sphères du faisceau et par conséquent passer par les deux sommets de ce faisceau, d'où il suit que toutes les cyclides admettent pour plan de symétrie le plan radical du faisceau des sphères. Enfin, les cyclides doivent couper ce plan radical suivant un réseau orthogonal. On peut alors construire le système orthogonal comme il suit :

Traçons dans un plan (P) un réseau orthogonal composé soit de cercles, soit de droites, et prenons deux points A et B réels ou imaginaires symétriques par rapport au plan P. Une cyclide quelconque de l'une des deux premières familles sera le lieu des cercles passant par A et B et s'appuyant sur une des lignes du réseau. La troisième famille est le faisceau des sphères comprenant les points A et B comme sphères de rayon nul. Il convient de remarquer que les cyclides des deux premières familles coupent le plan (P) suivant un deuxième réseau qui est l'inverse du premier par rapport au pied H de la droite AB sur le plan P avec un module égal à $-\overline{HA}^2$.

Si le réseau se compose de deux faisceaux de cercles, et qu'on prenne pour pôle d'inversion l'un des sommets de ce faisceau, on le transformera en un réseau composé de cercles concentriques avec leurs rayons, et nous aurons une famille de cyclides du troisième ordre. Si le réseau est formé de droites rectangulaires, toutes les cyclides seront du troisième ordre et l'on retrouvera le système réversible particulier, déjà signalé au nº 27.

Nous n'avons pas jusqu'ici distingué les inversions réelles ou imaginaires.

Si les points A et B sont réels on pourra prendre l'un d'eux pour pôle d'inversion, et le système sera transformé en un système réel formé de cônes de révolution orthogonaux de même sommet et de sphères concentriques.

Si les points A et B sont confondus au point H, chaque cyclide est le lieu d'une famille de cercles tangents en H à la droite perpendiculaire au plan (P) et l'inversion donne un système de cylindres de révolution orthogonaux ayant leurs génératrices parallèles, avec les plans perpendiculaires à ces génératrices.

Si enfin les points A et B sont imaginaires, toutes les sphères du faisceau coupent le plan (P) suivant un même cercle. En prenant pour pôle un point de ce cercle, on transforme le système en un autre comprenant deux familles de cyclides de révolution autour du même axe (tores ou cônes) avec leurs plans méridiens.

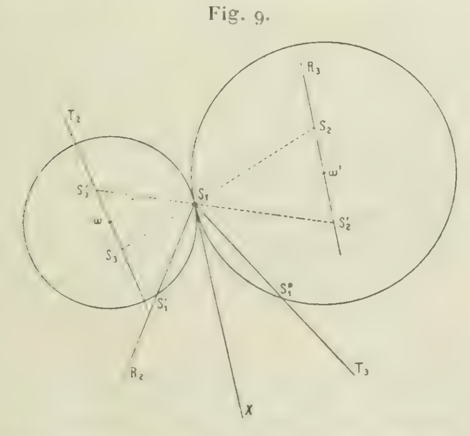
33. *Systèmes comprenant deux familles de sphères.* — On obtiendra un pareil système si l'axe radical d'un des faisceaux de cercles orthogonaux passe par le point H et si la puissance de ce point H par rapport aux cercles du faisceau est égale à $-\overline{HA}^2$. Ce système résulte en général de l'inversion du système composé 1° des cônes de même sommet S, de révolution

autour du même axe ; 2° des plans passant par cet axe ; 3° des sphères de centre S. Mais l'inversion contraire n'est réelle que si les points A et B sont réels. S'ils sont imaginaires, le système se transforme en un système de révolution défini en faisant tourner le réseau de deux faisceaux de cercles orthogonaux autour de l'axe d'un de ces faisceaux. L'un des faisceaux de cercles donne des sphères, l'autre des tores, et le système est complété par les plans méridiens.

Si enfin les points A et B se confondent le système inverse comprend des cylindres de révolution de même axe, leurs plans méridiens, et les plans de leurs sections droites.

34. *L'axe du cône des tangentes en un point conique d'une cyclide faisant partie d'un système triplement orthogonal est tangent à la courbe focale qui passe en ce point.* — Je terminerai ce travail par

Fig. 9.

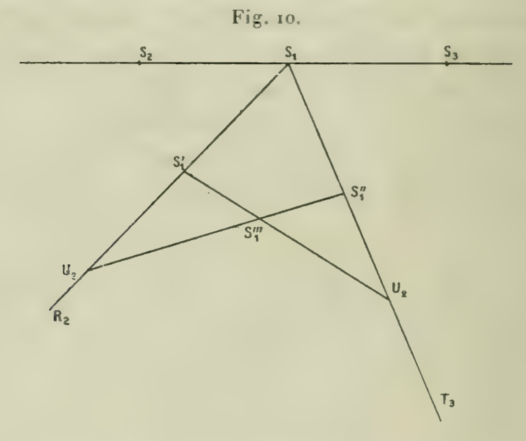


quelques remarques relatives aux systèmes orthogonaux composés de cyclides.

Soit S_1 (*fig.* 9 et 10) un point conique commun à deux

cyclides (C_2) et (C_3) de la deuxième et de la troisième familles, (R_2) l'axe radical de (C_2) passant par S_1 sur lequel se trouve un autre point conique S'_1, (T_3) l'axe radical de (C_3) passant en S_1 sur lequel se trouve un autre point conique S''_1. Les cercles axiaux des deux cyclides passent respectivement par S_1 et S'_1 et par S_1

Fig. 10.



et S''_1 et sont tangents à une même droite S_1X qui est l'axe commun des deux cônes de révolution tangents à chacune des deux cyclides au point S_1. La sphère qui les contient fait partie de la première famille; elle est tangente à S_1X et contient la focale par où passent toutes les cyclides de cette première famille dont chacune coupe (C_2) et (C_3) respectivement suivant deux cercles orthogonaux passant l'un par S_1 et S'_1, l'autre par S_1 et S''_1.

Le plan tangent en S_1 à l'une de ces cyclides (C_1) doit être normal à chacun des deux cônes de sommet S_1 respectivement tangents aux deux cyclides (C_2) et (C_3). Donc, il passe par leur axe commun S_1X. Donc, la droite S_1X est tangente à toutes les cyclides (C_1) et par suite à la focale par où elles passent toutes.

35. *Lieux des axes radicaux; enveloppe des plans de symétrie des cyclides d'une même famille.* — Le plan (P) perpendiculaire à S_1X en S_1 contient le cercle de rayon nul S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3). Donc il contient aussi le second axe radical (T_2) de la cyclide (C_2) (*fig.* 9 et 10); mais celui-ci est encore dans le plan perpendiculaire à $S_1S'_1$ en son milieu et ce plan-là passe comme le plan (P) par le centre ω du cercle axial de la cyclide (C_1). Donc (T_2) est perpendiculaire au plan $S_1S'_1X$ de ce cercle axial et passe par son centre ω. Pour la même raison le second axe radical (R_3) de la cyclide (C_3) passe par le centre ω' du cercle axial $S_1S''_1$, et est perpendiculaire à son plan. Donc ces deux axes passent par le centre de la sphère (U_1) qui contient les deux cercles axiaux et qui est la sphère appartenant à la première famille.

De même, l'axe radical (R_2) passe par le centre de la sphère (U_3) appartenant à la troisième famille. Sur cet axe radical se trouvent les deux points coniques S_1 et S'_1 qui sont tous deux sur la focale (F_1), laquelle est située sur la sphère (U_1). Cette focale est une courbe du quatrième ordre puisque c'est l'intersection d'une sphère et d'une cyclide. Les droites (R_2) passant toutes par le centre de la sphère (U_3) engendrent un cône dont chaque génératrice coupe la focale en deux points. Donc ce cône est du second ordre et la focale (F_1) est l'intersection de la sphère (U_1) et du cône.

Cette même focale est aussi l'intersection de la sphère (U_1) et du cône engendré par (T_3), lequel a son sommet au centre de la sphère (U_2). Il en résulte que ces deux cônes ont leurs plans de symétrie parallèles et même qu'ils ont leurs quatre génératrices isotropes respectivement parallèles.

Le plan de symétrie de la cyclide (C_2) qui passe

par (R_2) contient l'axe du cône des tangentes S_1X, mais S_1X est tangente à la focale (F_1) qui est sur le cône engendré par (R_2). Donc le plan de symétrie dont nous parlons est tangent au cône engendré par (R_2).

Pour la même raison, le plan de symétrie de la cyclide (C_2) passant par (T_2) enveloppe le cône décrit par (T_2) lequel a son sommet au centre de la sphère (U_1). De plus, ce plan de symétrie est perpendiculaire à (R_2). Donc le cône qu'il enveloppe est le cône supplémentaire du cône (R_2) ayant son sommet au centre de la sphère (U_1). Les deux cônes (R_2) et (T_2) sont donc supplémentaires et ont par conséquent leurs plans de symétrie parallèles. Finalement :

Les lieux des axes radicaux des cyclides se composent de six cônes du second ordre, deux pour chacune des trois familles. Ces cônes ont deux à deux le même sommet qui est le centre d'une des trois sphères du système. Les deux cônes qui correspondent à une même famille de cyclides sont supplémentaires. Ces six cônes ont leurs plans de symétrie parallèles. Enfin les plans de symétrie des cyclides sont les plans tangents à ces six cônes, chacun le long de la génératrice correspondante.

36. *Les directrices des focales.* — Tout point G d'une des trois focales (F_1) est un foyer de chacune des deux autres, c'est-à-dire que la sphère de rayon nul G est bitangente à chacune des focales (F_2) et (F_3). J'appelle *directrice* de (F_2) correspondant au foyer G, la droite qui joint les points de contact de cette sphère avec (F_2).

Considérons le point S_1 (*fig.* 9) comme foyer de la focale (F_2) située sur la sphère (U_2) et comprenant les points coniques S_2 et S'_2 de (C_3) situés sur l'axe radi-

cal (R_3), et cherchons la directrice correspondant à ce foyer.

La sphère de rayon nul S_1 touche la cyclide (C_3) suivant un cercle de rayon nul dont le plan est perpendiculaire à S_1X. La sphère (U_2) coupe ce cercle en deux points qui sont les points de contact cherchés. Or le cercle de rayon nul S_1 appartient à la famille des cercles de courbure de (C_3) qui admettent pour axe radical (R_2). Il passe donc par les deux points coniques S_2 et S_2' (*fig.* 9, où l'on a représenté schématiquement les éléments imaginaires) situés sur cet axe. Ces points étant sur la sphère (U_2) sont les points de contact cherchés, et la directrice est la droite (R_3). On verra de même qu'au second point conique S_1'' de (C_3) situé sur (T_3) correspond le même axe radical (R_3). Donc :

A chacun des points coniques d'une même cyclide situés sur un même axe radical correspond, sur la focale qui comprend les deux autres points coniques de cette même cyclide, une même directrice qui n'est autre que le deuxième axe radical de la même cyclide.

Remarquons que le cercle de rayon nul S_1 se compose des deux droites isotropes S_1S_2, S_1S_1' qui sont perpendiculaires à S_1X. De même l'axe S_2X_2 du cône tangent à la cyclide (C_3) au point S_2 est aussi perpendiculaire à S_1S_2. Enfin, la droite isotrope est perpendiculaire à elle-même. Donc les trois droites S_1X_1, S_2X_2 et S_1S_2 sont dans un même plan, ce qui prouve que les axes des deux cônes se rencontrent. En considérant les deux autres points coniques de la cyclide (C_3), on en déduit sans peine que *les quatre axes des cônes de révolution tangents à une cyclide aux quatre points coniques, passent par un même point de l'intersection des deux plans de symétrie.*

37. *Le groupe de six cyclides.* — Toutes les cyclides du système orthogonal se répartissent en groupes de six, de telle sorte que deux cyclides quelconques d'un même groupe ont un point conique commun.

Considérons toujours le point conique S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3). La cyclide (C_2) admet deux autres points coniques S_3 et S'_3 situés sur son axe radical (T_2). De même la cyclide (C_3) admet sur son second axe radical (R_3) deux points coniques S_2 et S'_2. Le cercle de rayon nul S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3) doit passer par les 4 points coniques S_3 S'_3, S_2 et S'_2 ; mais il se compose de deux droites isotropes passant par S_1. Il faut donc que ces quatre points soient deux à deux alignés sur S_1. Par exemple, l'une des droites isotropes est $S_1 S_2 S_3$ et l'autre $S_1 S'_2 S'_3$.

Considérons maintenant la cyclide (C_1) qui a un point conique en S_3 commun avec (C_2). Elle admettra sur son autre axe radical deux autres points coniques σ_2 et σ'_2 et l'on démontrera comme précédemment que l'un de ces points, σ_2 par exemple, est sur la droite isotrope $S_1 S_3$. Mais S_1 est sur la focale (F_1), S_2 sur la fosale (F_2), S_3 sur (F_3) et σ_2 sur (F_2) ; σ_2 et S_2 sont donc tous deux sur la sphère (U_2). Or la droite isotrope $S_1 S_3$ ne rencontre la sphère (U_2) qu'en un seul point à distance finie, lequel est S_2. Donc σ_2 se confond avec S_2, et la cyclide (C_1) qui a déjà un point conique commun avec (C_2) en a un autre commun avec (C_3). En général, *si deux cyclides de familles différentes ont un point conique commun, toute cyclide de la troisième famille qui a un point conique commun avec l'une des deux en a aussi un commun avec l'autre.*

Ou encore : *Si deux cyclides de familles différentes ont chacune un point conique commun avec*

une cyclide de la troisième famille, elles ont un point conique commun.

Avant d'aller plus loin, remarquons que deux cyclides de la même famille ne peuvent pas avoir un point conique commun appartenant à la même famille de lignes de courbure. En effet, les axes radicaux des deux cyclides ayant en commun le point S_1 devraient passer par le centre d'une même sphère. Donc ils coïncideraient. Mais cet axe radical ne rencontre qu'en deux points la sphère U_1 sur lequel se trouvent les points coniques d'indice 1. Donc les deux cyclides auraient non pas un, mais deux points coniques communs sur le même axe radical. Alors, à cause de l'orthogonalité avec les cyclides des deux autres familles, les cônes des tangentes en chacun de ces points coniques seraient identiques, et les deux cyclides coïncideraient.

Il y a deux cyclides de la première famille (C_1) et (C'_1) qui ont un point conique commun avec (C_2), par exemple (C_1) a le point conique commun S_3 et (C'_1) le point S'_3. Celles-là ont aussi chacune un point conique commun avec (C_3) savoir : (C_1) a S_2 et (C'_1) a S'_2. Considérons maintenant les deux cyclides (C_1) et (C_2) qui ont en commun le point conique S_3. Il y a une deuxième cyclide (C'_2) qui a un point conique commun S''_3 avec (C_1) et, puisque (C_1) en a un commun avec (C_3), (C'_2) en a un aussi commun avec (C_3), lequel, étant situé sur la focale (F_1), ne peut-être que S_1 ou S'_1 : mais ce ne peut être S_1 puisqu'alors les cyclides (C_2) et (C'_2) auraient un point conique commun.

De même considérons les deux cyclides (C_1) et (C_3) qui ont en commun le point conique S_2. Il y a une deuxième cyclide (C'_3) qui a le point conique S''_2 commun avec (C_1) et, puisque (C_1) a un point conique commun avec (C_2), (C'_3) en a un commun avec (C_2), lequel ne peut être que S'_1.

On peut alors dresser le Tableau suivant dans lequel nous supprimons les parenthèses pour abréger, et où le symbole $\rightarrow$ veut dire : « ont un point conique commun qui est ».

$$\begin{array}{llll} C_2 C_3 \rightarrow S_1, & C_2 C_3 \rightarrow S_1, & C'_2 C_3 \rightarrow S''_1, & C_2 C'_3 \rightarrow S'_1, \\ C_3 C_1 \rightarrow S_2, & C_3 C'_1 \rightarrow S'_2, & C_3 C_1 \rightarrow S_2, & C'_3 C_1 \rightarrow S''_2, \\ C_1 C_2 \rightarrow S_3. & C'_1 C_2 \rightarrow S'_3, & C_1 C'_2 \rightarrow S''_3, & C_1 C_2 \rightarrow S_3. \end{array}$$

On voit que les cyclides (C'_2) et (C'_3) ont chacune un point conique commun avec (C_1). Donc, elles ont entre elles un point conique commun que nous désignerons par S'''_1, ce qui permet d'ajouter au Tableau précédent :

$$\begin{array}{l} C'_2 C'_3 \rightarrow S'''_1, \\ C'_3 C_1 \rightarrow S''_2, \\ C_1 C'_2 \rightarrow S''_3. \end{array}$$

Considérons enfin la cyclide (C'_1) qui a en commun avec la cyclide (C_2) le point conique S'_3. Il y a une deuxième cyclide (C''_2) qui a avec (C'_1) un autre point conique commun S_3 ; puisque (C'_1) en a un commun avec (C_3), (C''_2) en a un aussi commun avec (C_3). Ce ne peut être que S_1 ou S'_1. Ce ne peut être S_1 parce qu'alors (C''_2) coïnciderait avec (C_2) et cette cyclide (C_2) aurait avec (C_1) les deux points coniques communs S'_3 et S_3. Donc c'est le point S'_1, et C''_2 coïncide avec (C'_2).

On démontrerait de même que toute cyclide, ayant un point conique commun avec l'une des trois cyclides (C') et différant des cyclides (C), coïncide avec une autre des cyclides (C').

Le groupe est alors constitué par les six cyclides (C_1), (C_2), (C_3), (C'_1), (C'_2), (C'_3), et l'on peu compléter comme il suit les Tableaux précédents :

$$\begin{array}{lll} C'_2 C_3 \rightarrow S''_1, & C_2 C'_3 \rightarrow S'_1, & C'_2 C'_3 \rightarrow S'''_1, \\ C_3 C'_1 \rightarrow S'_2, & C'_3 C'_1 \rightarrow S'''_2, & C'_3 C'_1 \rightarrow S'''_2, \\ C'_1 C'_2 \rightarrow S'''_3, & C'_1 C_2 \rightarrow S'_3, & C'_1 C'_2 \rightarrow S'''_3, \end{array}$$

ce qui montre bien que les six cyclides forment un groupe se partageant en huit sous-groupes de trois cyclides. Les trois points S appartenant à un même sous-groupe sont sur une même droite isotrope.

38. *Les douze axes radicaux et les trois quadrilatères plans.* — Les six cyclides du groupe admettent douze axes radicaux.

Tous ces axes radicaux doivent passer par l'un ou l'autre des centres des trois sphères (U_1), (U_2), (U_3). Bien que les droites isotropes soient imaginaires, représentons-les schématiquement sur la figure 10. Si l'on considère les points coniques d'indice 1 communs à deux cyclides d'indices 2 et 3, tels que S_1, S'_1, S''_1, S'''_1, on verra que les quatre axes radicaux $S_1 S'_1$, $S''_1 S'''_1$ appartenant aux cyclides (C_2) et (C'_2) et $S_1 S''_1$, $S'_1 S'''_1$ appartenant aux cyclides (C_3) et (C'_3) sont dans un même plan. Les quatre points S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 sont ainsi les quatre sommets d'un quadrilatère plan inscrit dans la focale (F_1), et dont les côtés opposés vont se couper aux centres des sphères (U_2) et (U_3). Il y a ainsi trois de ces quadrilatères. Par chacun des sommets de chacun d'eux passent deux droites isotropes dont chacune passe par deux sommets des autres quadrilatères, ce qui constitue les huit droites isotropes contenant les douze points coniques.

Par le centre de la sphère U_1 passent 4 axes radicaux dont deux appartiennent à une famille et deux à une autre. En combinant ceux qui n'appartiennent pas à une même famille, on trouve quatre plans contenant chacun deux droites isotropes. Il y a ainsi douze plans dont chacun contient deux droites isotropes.

La tangente à la focale qui contient le point S_1 en ce point est, comme on l'a vu au n° 35, perpendiculaire à

chacune des deux droites isotropes qui passent en S_1. Comme une droite isotrope est perpendiculaire à elle-même, on en conclut que les tangentes aux focales en trois points en ligne droite S_1, S_2, S_3 sont dans un même plan.

Chacune des trois focales est une ligne double de la surface réglée, lieu des droites isotropes S_1, S_2, S_3, car, en chaque point S_1 d'une de ces focales, la surface réglée admet deux plans tangents qui sont déterminés par la tangente à la focale et chacune des génératrices isotropes. On peut alors déterminer l'ordre de cette surface réglée par le raisonnement suivant :

L'intersection de la surface avec le plan de l'infini se réduit au cercle de l'infini ; mais comme l'ordre de la surface dépasse nécessairement deux, ce cercle est une ligne multiple. Le degré cherché est donc pair. Supposons qu'il soit égal à $2n$. Le cercle de l'infini est une ligne de multiplicité n. La surface doit couper la sphère U_1 suivant une courbe d'ordre $4n$. Or l'intersection se compose : 1° de la focale, ligne double de la surface réglée qui doit compter dans le calcul du degré pour 8 unités puisqu'elle est de quatrième degré ; 2° du cercle de l'infini qui doit compter pour $2n$ unités puisqu'il est du second degré et est une ligne de multiplicité n. On a donc l'équation

$$8 + 2n = 4n,$$

d'où $2n = 8$. La surface réglée, lieu des droites isotropes, est du huitième ordre.

Si le système est réversible, les trois sphères sont remplacées par trois plans rectangulaires que nous prendrons pour plans de coordonnées. A cause de la symétrie du système, les trois quadrilatères des points coniques deviennent trois rectangles situés dans ces

plans coordonnés, ayant leur centre à l'origine et leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées. Le groupe des six cyclides se compose de trois cyclides et des cyclides symétriques de celles-là, chacune par rapport au plan de coordonnées qui n'est pas pour elle un plan de symétrie. Les six tores qui ont servi de point de départ à la construction du système réversible forment un de ces groupes.

[D2b]

SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

Par M. J. HAAG.

Nous nous proposons d'indiquer certaines catégories de séries que l'on peut sommer par l'application de la théorie des séries entières et dont des exemples ont été plusieurs fois demandés aux examens oraux de l'École Polytechnique.

1. *Si le terme général d'une série est une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont entiers et simples, on peut toujours sommer cette série.*

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont p nombres entiers, positifs ou négatifs, et où $P(n)$ désigne un polynome en n de degré au plus égal à $p-2$, afin qu'il y ait convergence. On suppose, en outre, qu'on ne donne à n que des valeurs supérieures au plus grand des nombres $-a, -b, \ldots,$

$-l$, de manière qu'aucun terme ne devienne infini. Il revient au même d'admettre que tous les pôles sont négatifs et que n prend toutes les valeurs entières, à partir de 1.

Cela posé, décomposons la fraction rationnelle u_n en éléments simples, soit

$$u_n = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+B} + \ldots + \frac{L}{n+l}.$$

D'après l'hypothèse faite sur le degré de $P(n)$, la somme des résidus $A + B + \ldots + L$ est nulle.

Introduisons la série entière

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Ax^n}{n+a} + \frac{Bx^n}{n+b} + \ldots + \frac{Lx^n}{n+l} \right).$$

Elle admet pour intervalle de convergence $(-1, +1)$. D'autre part, pour $x = 1$, elle est convergente, puisqu'elle se réduit à la série (u_n). Donc, d'après le théorème d'Abel, la somme U de celle-ci est la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Or, il est facile d'avoir une expression simple de $f(x)$. Calculons, par exemple, la série entière

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ax^n}{n+a}.$$

A cet effet, nous écrivons l'identité

$$\frac{-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^a}{a}}{x^a} = \frac{x}{1+a} + \frac{x^2}{2+a} + \ldots + \frac{x^n}{n+a} + \ldots.$$

D'où l'on tire

$$\alpha(x) = \frac{A}{x^a} \left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^a}{a} \right],$$

et, par suite,

$$f(x) = -\log(1-x)\left(\frac{A}{x^a} + \frac{B}{x^b} + \ldots + \frac{L}{x^l}\right)$$
$$-\sum \frac{A}{x^a}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^a}{a}\right),$$

le signe Σ indiquant une somme qui doit porter sur tous les nombres $a, b, \ldots, l$.

Si l'on fait maintenant tendre x vers 1, le premier terme de $f(x)$ tend vers zéro, comme on le voit en posant $1-x=y$ et se rappelant que $A+B+\ldots+L=0$. *On a donc finalement la formule élégante*

$$U = -\sum A\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a}\right). \tag{1}$$

Remarquons que si $a=0$, les termes correspondants n'existent pas, car $\alpha(x) = -A\log(1-x)$.

Exemple. — Soit à calculer la série

$$U = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

(examens oraux de l'École Polytechnique, 1911).

On écrit d'abord

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)}.$$

Or

$$\frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n+1} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{n+3}.$$

Appliquant la formule (1), on a immédiatement

$$U = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{65}{36}.$$

2. *Si le terme général d'une série est le produit par* $\frac{1}{n!}$ *d'une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont simples, entiers et négatifs, on peut toujours sommer cette série.*

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)}\,\frac{1}{n!},$$

où a, b, ..., l sont des entiers positifs et $P(n)$ un polynome quelconque en n. On a

$$\frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)} = \sum \frac{A}{n+a} + \sum M_p n^p.$$

On est donc ramené à une somme de séries appartenant aux deux types suivants :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)n!}, \qquad W_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}.$$

Or, celles-ci se calculent aisément en partant du développement de e^x. On a, en effet,

$$x^{a-1} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a-1}}{n!},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a}}{n!(n-a)} &= \int_0^x e^x x^{a-1}\,dx \\ &= e^x[x^{a-1} - (a-1)x^{a-2} \\ &\qquad + (a-1)(a-2)x^{a-3} - \ldots] + (-1)^a(a-1)!\end{aligned}$$

En faisant $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned}V = e[1 &- (a-1) + (a-1)(a-2) \\ &- (a-1)(a-2)(a-3) + \ldots + (-1)^{a-1}(a-1)!] \\ &+ (-1)^a(a-1)!\end{aligned}$$

Quant à W_p, on l'obtiendra en faisant $x = 1$ dans la série entière

$$X_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p x^{n-1}}{n!},$$

laquelle se détermine, de proche en proche, au moyen de la relation de récurrence

$$X_p = X_{p-1} + x X'_{p-1},$$

sachant en outre que

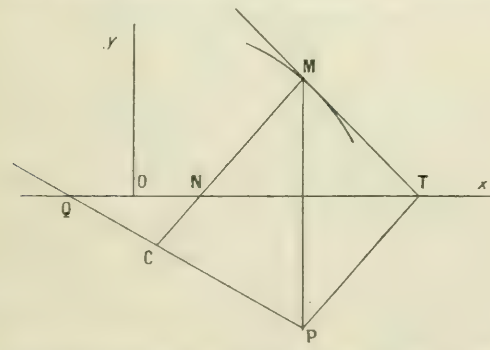
$$X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Existence de l'intégrale définie.*

II. Problème. — *Étant donné un point* M *d'une courbe* (C), *on mène la tangente* MT, *la normale* MN, *et l'on détermine le point* P *par l'intersection de la perpendiculaire menée par* M *à l'axe* Ox *et de la parallèle menée par* T



à MN; *on joint le point* P *au centre de courbure* C *relatif au point* M; *la droite* CP *rencontre* Ox *en* Q.

1° *Déterminer la courbe* (C) *connaissant l'abscisse* X *de* Q;

2° *Cette détermination se ramène aux quadratures si* X *est fonction de* x : *on prendra cette fonction sous la forme*

$$X = x f(x);$$

3° *Traiter les cas particuliers suivants :*

$$f(x) = k; \qquad f(x) = \frac{k}{x}; \qquad f(x) = x,$$

où k *est une constante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer*

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x^2}\,dx}{3x^2+2x+1}.$$

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Surfaces développables. Définition. Indiquer quelles sont leurs lignes asymptotiques et leurs lignes de courbure. Toute surface développable satisfait à l'équation* $rt - s^2 = 0$ *et inversement les intégrales de l'équation* $rt - s^2 = 0$ *sont les surfaces développables.*

II. Problème. — *La droite*

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = \varphi - \cos\varphi$$

enveloppe une courbe C *dont on donnera la définition géométrique.*

Soit ω *le centre de courbure relatif à un point* M *de la courbe* C; *sur la normale* ωM, *on prend le point* P *tel que*

$$\omega P = k\,\overline{\omega M}.$$

Le point P *décrit une courbe; construire la tangente en un point de cette courbe, en supposant d'abord que* k *est une quantité fixe, puis une quantité variable.*

Déterminer les courbes Γ *qui coupent les normales* ωM *sous un angle constant* θ.

Soit en particulier Γ_1 *celle de ces courbes qui passe par le même point que la courbe* C *pour* $\varphi = 0$; *déterminer sa développée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)e^x + 3x.$$

Déterminer l'intégrale qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad y' = -1, \qquad y'' = 0.$$

Calculer à 0,001 *près l'ordonnée du point d'abscisse* $x = 0{,}8$ *ainsi que le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*

(Juillet 1911.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$2p \operatorname{ch} x + 2qy \operatorname{sh} x - z \operatorname{sh} x = 0.$$

Déterminer la surface intégrale qui contient la droite

$$x = y = z$$

et celle qui contient la parabole

$$x = 0, \qquad z^2 = 2m(y - a).$$

Qu'arrive-t-il si l'on cherche à déterminer une surface intégrale passant par la chaînette $z = 0$, $y = \alpha \operatorname{ch} x$?

II. *Chercher les lignes asymptotiques de la surface qui a pour équation*

$$x \operatorname{cotang}\left(\frac{y}{x}\right) = 1 - z \operatorname{cotang} z.$$

Nota. — *On pourra poser $z = v$, $y = ux$, et exprimer ainsi x, y, z en fonction de u et v.*

Épreuve pratique. — *Soit*

$$y^2 = X = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Je considère les intégrales

$$y_m = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{X}}, \qquad z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}};$$

exprimer y_2 et y_3 en fonction de y_0, y_1 : puis z_2 en fonction de z_1, y_0, y_1; on distinguera les deux cas où a est ou n'est pas zéro de X.

Posant enfin $x = \wp u$, $y = \wp' u$, dire quelles formules on en déduit relativement aux fonctions elliptiques.

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Exprimer $\wp(2u)$ en fonction rationnelle de $\wp u$;*

2° *Étant donné $\wp u = a$, calculer $\wp\left(\frac{u}{2}\right) = t$. Peut-on interpréter géométriquement la signification des racines de l'équation en t obtenue, en utilisant la cubique définie par les équations*

$$x = \wp u, \qquad p = \wp' u;$$

3° 2ω *et* $2\omega'$ *étant les périodes de la fonction elliptique $\wp u$, on suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs; a étant réel.*

à quelle condition les quatre racines de l'équation en t sont-elles réelles ? Si $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ *désignent ces quatre racines, rangées par ordre de grandeur, et si l'on pose* $p(v_\alpha) = t_\alpha$, *déterminer* v_1, v_2, v_3, v_4, v *étant un nombre tel que* $pv = a$;

4° e_1 *désignant le plus grand zéro du polynome* $4z^3 - g_2 z - g_3$, *où* g_2, g_3 *sont les deux invariants relatifs à* pu, *on suppose en particulier* $a = e_1$. *Étudier ce cas spécial. Calculer* $p\left(\frac{\omega}{2}\right)$ *et* $p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)$.

II. *Soit* $y = p(mu)$, $x = pu$: *trouver la relation qui existe entre* $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. *Montrer que si m est un nombre entier réel, l'équation différentielle obtenue admet une intégrale de la forme* $y = R(x)$, R *désignant une fonction rationnelle de* x.

Formules pouvant être utiles :

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2;$$

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

La formule à obtenir dans la première question est

$$p(2u) = \frac{\left(p^2 u + \frac{1}{4} g^2\right)^2 + 2g_3 pu}{4p^3 u - g_2 pu - g_3}.$$

Épreuve pratique. — *On considère la cubique gauche* Γ *qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, est définie par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Soit M *l'un de ses points. Le plan osculateur* P *au point* M *à la cubique* Γ *coupe l'axe* Oz *au point* A. *On considère la surface réglée* S *engendrée par la droite* MA *lorsque le point* M *décrit la cubique* Γ. *On demande de trouver les lignes asymptotiques de la surface* S.

Dans le plan xOy *on considère les deux points* B$(x = y = 1)$ *et* C$(x = 1, y = 2)$. *Par le point* B *passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de* S *sur le plan* xOy, *parallèlement à* Oz ; *par le point* C *passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de* S *sur le plan* xOy, *parallèlement à* Oz. *Ces quatre lignes forment un qua-*

drilatère mixtiligne BECD, *dont* B *et* C *sont deux sommets opposés. On considère le cylindre qui a pour base ce quadrilatère, dont les génératrices sont parallèles à* Oz, *et qui est limité à la surface* S. *Trouver le volume de ce cylindre.* (Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient* OX, OY, OZ, *trois axes de coordonnées rectangulaires. Une surface* S *jouit de la propriété suivante : si* M(x, y, z), *est un point de cette surface*, N, *le point où la normale en* M *à la surface* S *coupe le plan* XOY, P, *le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur le plan* XOY, *on a* $\overline{\mathrm{PN}} = a$, a *désignant une longueur constante. Trouver l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la surface* S *est une surface intégrale.*

II. *Trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles.*

III. *Déterminer la bande caractéristique d'éléments linéaires*, (x, y, z, p, q), *définie par un élément* $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ *dont les coordonnées satisfont à l'équation aux dérivées partielles. Quelle est la nature des courbes caractéristiques?*

IV. *Chercher l'équation du cône* T, *enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales qui passent par un point donné*, (x, y, z). *En déduire l'équation aux différentielles totales des courbes intégrales.*

V. *Chercher la surface intégrale engendrée par les courbes caractéristiques issues du point* $x = y = 0$, $z = h$.

VI. *Déterminer les deux surfaces intégrales qui passent par la droite* $x = y = z$.

VII. *Chercher les courbes intégrales situées dans le plan* $z = x$, *et en particulier la courbe intégrale* C *de ce plan qui passe au point* $z = x = a$, $y = 0$.

VIII. *Déterminer la surface intégrale qui contient la courbe* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer l'intégrale de surface*

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}}\!\!\int (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy).$$

la surface S *étant définie par les équations*

$$x = (a + b \cos\varphi) \cos\psi,$$
$$y = (a + b \cos\varphi) \sin\psi,$$
$$z = b \sin\varphi,$$

a et b sont des constantes, φ *et* ψ *varient de* o *à* 2π.

II. *Chercher sur la surface qui a pour équation en axes de coordonnées rectangulaires,* $z = \cos x \cos y$, *le lieu des points où l'indicatrice est un système de droites parallèles, le lieu des points où l'indicatrice est formée d'hyperboles équilatères conjuguées, et, enfin, trouver les lignes asymptotiques.* (Juillet 1911.)

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *On peut intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

en prenant pour nouvelles variables les quantités y *et* $\frac{x}{y}$. *Les courbes intégrales* (C) *sont unicursales et n'ont aucun point à l'infini;*

2° *Comment définit-on les diverses significations de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+z+1)}$$

lorsque le point z décrit dans son plan un chemin quelconque allant d'un point z_0 *à un point* z?

3° *Si le chemin choisi est fermé et est formé par l'une des courbes unicursales* (C) *ne passant par aucun point singulier, distinguer les différents groupes de courbe* (C) *qui diffèrent par les valeurs d'intégrales qu'elles fournissent.*

SOLUTION.

1° Si $\frac{x}{y} = t$, on a

$$y\,dy + t\,dt = 0,$$

d'où les courbes (C)

$$\text{(D)} \qquad \frac{x^2}{y^2} + y^2 = a^2,$$

ou

$$x = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \qquad \text{et} \qquad y = a \sin \varphi.$$

Quand a varie, les courbes (C) se succèdent boucles dans boucles, comme le prouvent l'étude du coefficient angulaire des tangentes à l'origine et la forme en huit des courbes;

3° Les points singuliers et leurs résidus sont :

$$m = +i, \qquad m' = -i, \qquad b = \alpha, \qquad b' = \alpha^2,$$

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_{m'} = -\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_b = \frac{3 - i\sqrt{3}}{6}, \qquad \varepsilon_{a'} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}.$$

Les valeurs de séparation sont $a^2 = 1, \frac{13}{12}$. Les deux premiers groupes de courbes (C) donnent zéro. Le dernier groupe donne, pour un seul tour, $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Épreuve pratique. — 1° *Condition pour qu'une série de sections circulaires d'un ellipsoïde soit une série de lignes de courbure;*

2° *Les pôles d'une fonction méromorphe sont simples et disposés d'après la loi*

$$a_n = \sqrt[3]{n}\, e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

Les résidus sont donnés par la formule

$$\varepsilon_n = \frac{n - i}{n - i}.$$

Former, d'après la règle d'Hermite, l'expression d'une fonction qui ne diffère de la fonction méromorphe que par une fonction entière.

SOLUTION.

1° Toute sphère passant par une section circulaire coupe la surface suivant une seconde section circulaire.

Tout système de cercles lignes de courbure correspond à un système de sphères inscrites.

La compatibilité des deux conditions impose que les deux systèmes de sections circulaires soient confondus. Donc l'ellipsoïde est de révolution.

2° La fonction d'Hermite est

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n+i}{n-i}\left[-\frac{1}{z-n^{\frac{1}{3}} e^{in\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}} e^{in\frac{\pi}{2}}}+\frac{z}{n^{\frac{2}{3}}{}^{i2n\frac{\pi}{4}}}+\frac{z^2}{n^{\frac{3}{3}}{}^{i3n\frac{\pi}{4}}}+\frac{z^3}{n^{\frac{4}{3}} e^{i3n\frac{\pi}{4}}}\right].$$

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée par les équations*

$$x = (1+u)\operatorname{ch} v,$$
$$y = (1-u)\operatorname{sh} v,$$
$$z = u,$$

où sh v *et* ch v *représentent le sinus et le cosinus hyperboliques de l'argument* v *et où* u *et* v *sont les variables indépendantes;*

2° *Même question en supposant que l'on remplace* sh v *et* ch v *par le sinus et le cosinus ordinaires,* sin v *et* cos v;

3° *Rapprocher les deux questions.*

Épreuve pratique. — *Conditions pour que l'intégrale définie*

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

ait un sens.

Démontrer que l'on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$J = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx.$$

Démontrer que, si l'on pose $p = \frac{2m+1}{2n}$ *en prenant pour* m *et* n *des nombres entiers tels que* p *satisfasse aux conditions trouvées plus haut, on a aussi*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,x^{2m}\,dx}{1+x^{2m}}.$$

Enfin, à l'aide de cette dernière forme, montrer que l'on a

$$J = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(Juin 1911.)

[D4d]

MAXIMUM DU MODULE DES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE UN ET DEUX;

Par M. G. VALIRON.

Je me propose de donner ici une limite supérieure précise du maximum du module d'une fonction entière d'*ordre non entier* et de genre *un* ou *deux*. Pour les fonctions de genre *un*, le résultat que j'indique est une généralisation de la formule donnée par M. Lindelöf dans son *Mémoire sur les fonctions entières* (p. 63), mais la méthode est différente. Je ferai usage des résultats obtenus par M. Denjoy dans le premier Chapitre de sa Thèse.

1. *Notations et résultats acquis.* — On peut évidemment se borner à considérer un produit canonique. Nous désignerons suivant l'usage par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les zéros; par r_n le module de a_n; par p le genre et ρ l'exposant de convergence; enfin, nous posons

$$E(x, p) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^p}{p}},$$

de sorte que le produit s'écrit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right).$$

Soit $\rho[1+\beta(x)]$ un *exposant net* de la suite des

zéros [1]; on a, pour $n > n_0$,

$$n \leqq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n; par suite, si $y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}}$ désigne la fonction inverse de $x^{\rho[1+\beta(x)]}$, on a pour $n > n_0$

$$r_n \geqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux deux conditions suivantes:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{x=\infty} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \alpha'(x) x \log x = 0.$$

Nous poserons

$$(1) \qquad \mathrm{R}_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

on aura donc

$$r_n \geqq \mathrm{R}_n \qquad (n > n_0).$$

Soit alors $\mathrm{M}(u)$ le maximum de $|\mathrm{E}(x, p)|$ pour $|x| = u$; $\mathrm{M}(u)$ est une fonction croissante de u, on a donc

$$\mathrm{M}\left(\frac{r}{r_n}\right) < \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right),$$

et, par suite, en désignant par $\mathrm{M}(r)$ le maximum du module de $\mathrm{F}(z)$ pour $|z| = r$,

$$(2) \qquad \mathrm{M}(r) < \prod_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right).$$

Le calcul de $\mathrm{M}(u)$ a été fait par M. Denjoy (Thèse, p. 17).

---

[1] Pour cette définition, *voir* mon article *Expression asymptotique de certaines fonctions entières* (*Nouvelles Annales*).

Pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$,

$$(3)\quad \begin{cases} \log[M(u)] = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du, \\ u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}; \end{cases}$$

Pour $u \geqq 1 - \frac{1}{p}$,

$$(4)\qquad M(u) = (u-1)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}};$$

le maximum correspond, pour $u \overline{\gtrless} 1 + \frac{1}{p}$ à $x = u$, et pour $u \geqq 1 - \frac{1}{p}$ à $x = ue^{i\theta}$.

2. *Calcul de certaines sommes.* — Soit a un nombre réel supérieur à *un*, définissons n' par les inégalités

$$(5)\qquad R_{n'} \leqq \frac{r}{a} < R_{n'+1};$$

nous désignerons par n_0 un nombre tel que, pour $x > n_0$, $\alpha(x)$ et $\alpha'(x)x\log x$ soient très petits (inférieurs en valeur absolue à un nombre positif η) et nous supposerons r assez grand pour que $\left(\frac{n_0}{n'}\right)^{1-\frac{p}{\rho}}$ soit arbitrairement petit ($< \eta$).

Ceci posé, considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \frac{R_n^q}{r^q} \qquad (q \geqq -p);$$

en posant

$$\frac{r}{a} = (n'+\theta)^{\frac{1+\alpha(n'+\theta)}{\rho}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \int_{n_0}^{n'+\theta} x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\,dx \qquad (0 < \theta_1 < 1).$$

Mais nous avons

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho}{\rho+q}\,x\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right]$$
$$= x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\left[1+\frac{q\,\alpha(x)}{\rho+q}-\frac{q}{\rho+q}\,x\log x\,\alpha'(x)\right]$$
$$= (1+\varepsilon'_q)\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} \quad (^1),$$

d'où

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q}\left[x\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right]_{n_0}^{n'+\theta}(1+\varepsilon''_q),$$

et, d'après la condition imposée à n',

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q}\,n'\left(\frac{r}{a}\right)^q(1+\varepsilon'''_q);$$

enfin, en utilisant l'inégalité (5),

$$(6)\qquad \sum_{n_0}^{n'} \frac{R_n^q}{r^q} = n'\,\frac{\rho}{\rho+q}\,\frac{1}{a^q}(1+\varepsilon_q) \qquad (q \geqq -p) \quad (^2).$$

De la même façon, on pourra effectuer le calcul de la somme

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{R_n^q} \qquad (q \geqq p+1);$$

on trouvera

$$(7)\qquad \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{R_n^q} = n'\,\frac{\rho}{q-\rho}\,a^q(1+\varepsilon_q).$$

---

(1) Dans tout ce qui suit, ε affecté ou non d'indices représente une quantité tendant vers zéro avec η, et d'une façon uniforme, par exemple $\varepsilon_\beta^\alpha > \sqrt{\eta}$; η tend d'ailleurs vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

(2) Pour $q > 0$ on a, en effet, $R_{n'}^q < \left(\frac{r}{a}\right)^q$; pour $q < 0$, $R_{n'} = \frac{r}{a}(1+\varepsilon_{n'})$, $\varepsilon_{n'}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n'}$, car $\frac{R_{n'+1}}{R_{n'}}$ tend vers un.

Enfin, si nous considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n,$$

nous pourrons l'écrire

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + \int_{n_0}^{n'+\theta} \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x \, dx,$$

et comme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1-\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right] = \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x + \varepsilon(x)$$

$$(n_0 < x < n'),$$

nous aurons

$$(8) \qquad \sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + n' \log \frac{r}{a} - n'(1+\varepsilon') \frac{1}{\rho}$$
$$= n' \log r - n'(1+\varepsilon)\left[\frac{1}{\rho} + \log a\right].$$

3. *Fonctions entières de genre un.* — Pour $p = 1$, l'inégalité (3) devient

$$\log[M(u)] = \int_0^u u \, du \qquad \left(u \leqq 1 + \frac{1}{p}\right);$$

donc pour $u \leqq 2$, on a

$$(3') \qquad \log M(u) = \frac{u^2}{2},$$

et pour $u \geqq 2$,

$$(4') \qquad M(u) = (u-1)e^u.$$

L'inégalité (2) devient alors

$$(2') \quad M(r) \leqq \prod_{1}^{n=\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \left[\prod_{1}^{n'}\left(\frac{r}{R_n} - 1\right) e^{\frac{r}{R_n}}\right] e^{\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2R_n^2}},$$

où le nombre n' est défini par la double inégalité

$$R_{n'} \leq \frac{r}{2} < R_{n'+1}.$$

Nous allons donc appliquer les calculs du paragraphe précédent, en prenant $a = 2$.

Nous avons

$$\prod_{n_0}^{n'} \left(\frac{r}{R_n} - 1\right) e^{\frac{r}{R_n}} = \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \ldots R_{n'}} \prod_{n_0}^{n'} \left(1 - \frac{R_n}{r}\right) e^{\frac{r}{R_n}}$$

$$= \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \ldots R_{n'}} e^{\sum_{n_0}^{n'} \left[\frac{r}{R_n} + \log\left(1 - \frac{R_n}{r}\right)\right]} = A e^{B}.$$

Nous obtenons alors

$$\log A = (n' - n_0) \log r - \sum_{n_0}^{n'} \log R_n.$$

et, en utilisant l'égalité (8) où $a = 2$,

$$\log A = n'(1 + \varepsilon)\left[\frac{1}{\rho} + \log 2\right] - n_0 \log r.$$

De même, d'après l'égalité (6),

$$B = \sum_{n_0}^{n'} \frac{r}{R_n} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q} \sum_{n=n_0}^{n=n'} \frac{R_n^q}{r^q}$$

$$= n'(1 + \varepsilon)\left[\frac{2\rho}{\rho - 1} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho + q)} \frac{1}{2^q}\right],$$

et enfin, d'après l'égalité (7),

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2 R_n^2} = n'(1 + \varepsilon) \frac{2\rho}{2 - \rho};$$

l'addition de ces divers résultats nous donne

$$\log M(r) \leqq K + n'(1+\varepsilon)\left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} - \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)}\,\frac{1}{2^q}\right] - n_0 \log r,$$

où K dépend de n_0 et r, $K < n_0 h r$; par suite, en prenant r assez grand, comme $\dfrac{n'}{n_0 r}$ et $\dfrac{n'}{\log r}$ croissent indéfiniment, on a

$$(9)\quad \log M(r) \leqq n'(1+\varepsilon)\left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)}\,\frac{1}{2^q}\right].$$

L'égalité a lieu lorsque les arguments des zéros sont convenablement choisis. Le crochet qui figure au second membre peut s'écrire sous une forme plus simple : on a

$$\frac{\rho}{q(q+\rho)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+\rho},$$

d'où

$$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q)2^q} = \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q\,2^q} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q} = \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q},$$

le crochet considéré devient ainsi

$$\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q}$$
$$= \frac{2\rho}{2-\rho} + 2 + \frac{1}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q},$$

ce qui peut encore s'écrire, en groupant les deux premiers termes et en faisant entrer le troisième et le quatrième dans le Σ,

$$\frac{4}{2-\rho} + \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^{q-1}} = \frac{4}{2-\rho} + 2\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^{q}};$$

en posant

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + 2\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^{q}},$$

nous avons

$$\log M(r) \leqq n'(1+\varepsilon) H_2; \tag{10}$$

n' est défini par les inégalités

$$R_{n'} \leqq \frac{r}{2} < R_{n'+1}$$

ou

$$(n'+\theta)^{\frac{1+\alpha(n'+\theta)}{\rho}} = \frac{r}{2}.$$

On tire de là

$$n'+\theta = \left(\frac{r}{2}\right)^{\rho\left[1+\beta\left(\frac{r}{2}\right)\right]},$$

$\beta(x)$ étant la fonction considérée au paragraphe **1**; or, d'après les propriétés (A) qui sont vérifiées par $\beta(x)$, on a

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right) = \beta(r) - \frac{r}{2}\beta'(\theta' r) \qquad \left(\frac{1}{2} < \theta' < 1\right)$$

ou

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right) = \beta(r) - \frac{\varepsilon}{\log r},$$

et par suite

$$n' = (1+\varepsilon)\frac{r^{\rho[1+\beta(r)]}}{2^{\rho}}.$$

L'inégalité (10) prend ainsi la forme

$$\log M(r) \leqq (1+\varepsilon)\frac{H_2}{2^\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]}, \tag{11}$$

où $\rho[1+\beta(x)]$ est *un exposant net de la fonction.*

Le nombre H_2 est défini par une série convergeant à la façon d'une progression géométrique, si l'on désigne par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

la série hypergéométrique

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p}\,\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-p-1)}x^p + \ldots,$$

on peut écrire

$$\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^q} = \frac{1}{\rho-1}\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{\rho-1}{\rho+q-1}\,\frac{1}{2^q}$$
$$= \frac{1}{\rho-1}F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right),$$

de sorte que nous avons

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{2}{\rho-1}F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right).$$

On peut aussi retrouver la forme donnée au nombre H_2 par M. Lindelöf. Considérons d'une façon générale le nombre

$$E = \sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-p)c^q} = \frac{1}{\rho-p}F\left(1, \rho-p, \rho, \frac{1}{c}\right)$$
$$(\rho > p, c \geqq 2).$$

Si nous considérons la série

$$g(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{x^{\rho-p+q}}{(\rho-p+q)c^q},$$

on a

$$\mathrm{E} = g(1) \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0\,;$$

d'autre part,

$$g'(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^{\rho-p-1+q}}{c^q} = x^{\rho-p-1} \frac{1}{1-\frac{x}{c}},$$

donc

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \frac{x^{\rho-p-1}}{1-\frac{x}{c}}\, dx.$$

En posant $x = 1 - \frac{1}{z}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= -\int_1^{+\infty} \frac{c}{c-1} (z-1)^{\rho-p-1} z^{-\rho+p-1} \left(1 + \frac{\frac{1}{c-1}}{z}\right)^{-1} dz \\
&= -\frac{c}{c-1} \int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1}\, dz \\
&\quad \times \mathrm{F}\left(1,\ 1,\ \rho - p + 1,\ \frac{1}{1-c}\right),
\end{aligned}$$

et comme

$$-\int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1}\, dz = \int_0^1 (1-u)^{\rho-p-1}\, du = \frac{1}{\rho-p},$$

on aura

$$\mathrm{E} = \frac{c}{c-1} \frac{1}{\rho-p} \mathrm{F}\left(1,\ 1,\ \rho-p+1,\ \frac{1}{1-c}\right),$$

ou encore l'égalité

$$\mathrm{F}\left(1,\ \rho-p,\ \rho,\ \frac{1}{c}\right) = \frac{c}{c-1} \mathrm{F}\left(1,\ 1,\ \rho-p+1,\ \frac{1}{1-c}\right).$$

En particulier, pour $p - 1$, $c = 2$, nous obtenons

$$\mathrm{F}\left(1,\ \rho-1,\ \rho,\ \frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{F}(1,\ 1,\ \rho,\ -1),$$

en portant dans l'expression de H_2, on a

$$\mathrm{H}_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{4}{\rho-1} \mathrm{F}(1,\ 1,\ \rho,\ -1)\,:$$

c'est l'expression trouvée par M. Lindelöf. La série $F(1, 1, 2, -1)$ converge d'ailleurs très lentement.

4. *Fonctions de genre deux.* — Dans ce cas, $p=2$, les expressions du maximum $M(u)$ deviennent : pour $u \leqq \frac{3}{2}$,

$$(3'') \quad \log M(u) = 2\int_0^u u^2 \cos\theta \, du \qquad \left(u = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right);$$

pour $u \geqq \frac{3}{2}$,

$$(4'') \qquad M(u) = (u-1)\, e^{u + \frac{u^2}{2}}.$$

De l'égalité $u = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$ nous tirons

$$u = \frac{4\cos^2\theta - 1}{2\cos\theta},$$

d'où, comme $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$,

$$\cos\theta = \frac{u + \sqrt{u^2+4}}{4};$$

et par conséquent nous avons, pour $u \leqq \frac{3}{2}$,

$$(12) \quad \log M(u) = 2\int_0^u \frac{u^3 + 2u^2\left(1 + \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{4}\, du$$
$$= \frac{u^4}{8} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{40} + \ldots$$
$$+ (-1)^{q+1} \frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q} \frac{u^{2q+3}}{(2q-3)2^{3q}} + \ldots$$

Nous aurons ici

$$M(r) \leqq \prod_1^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_1^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

en posant

$$R_{n'} \leqq \frac{2r}{3} < R_{n'+1}.$$

Le calcul de $\prod_1^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$ est analogue à celui fait précédemment, il suffira d'utiliser les résultats du paragraphe 2, en prenant $a = \frac{3}{2}$. Nous aurons

$$\prod_{n_0}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \frac{r^{n'-n_0}}{R_1 R_2 \ldots R_{n'}} e^{\sum_{n_0}^{n'} \left[\frac{r}{R_n} + \frac{r^2}{2R_n^2} + \log\left(1 - \frac{R_n}{r}\right)\right]},$$

et nous obtiendrons

$$\prod_{n_0}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)L - n_0 \log r}, \tag{13}$$

où L est défini comme il suit :

$$L = \frac{1}{\rho} + \log\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho-1} + \frac{9}{8}\frac{\rho}{\rho-2} - \sum_1^{\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q)\left(\frac{3}{2}\right)^q};$$

ici encore, nous pouvons transformer cette expression

$$\frac{\rho}{q(\rho+q)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+\rho},$$

d'où

$$L = \frac{1}{\rho} + \log\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{\rho-1} + \frac{9}{8} + \frac{9}{4}\frac{1}{\rho-2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{(q+\rho)\left(\frac{3}{2}\right)^q} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{q\left(\frac{3}{2}\right)^q}, \tag{14}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} L &= \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4}\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho-2)\left(\frac{3}{2}\right)^q} \\ &= \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4(\rho-2)} F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$; le logarithme de cette

expression est

$$\sum_{n=n'+1}^{n=+\infty}\left[\frac{r^4}{8\,R_n^4}+\frac{r^3}{3\,R_n^3}+\frac{r^5}{40\,R_n^5}+\ldots\right.$$
$$\left.-(-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q}\,\frac{r^{2q+3}}{(2q+3)2^{3q}R_n^{2q+3}}+\ldots\right];$$

si, dans la parenthèse, on remplace chaque terme par sa valeur absolue, on a une somme inférieure à $\frac{11}{8}\,\frac{r^3}{R_n^3}$ comme on le constate aisément, et comme la série $\sum\frac{1}{R_n^3}$ converge, on peut intervertir l'ordre des sommations, et écrire l'expression précédente :

$$\frac{1}{8}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^4}{R_n^4}+\frac{1}{3}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^3}{R_n^3}+\ldots$$
$$+(-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q}\,\frac{1}{(2q+3)2^{3q}}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^{2q+3}}{R_n^{2q+3}}-\ldots$$

Par suite, en utilisant l'égalité (7), nous aurons

$$\log\prod_{n'+1}^{\infty}M\left(\frac{r}{R_n}\right)$$
$$=n'(1+\varepsilon)\left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)}+\frac{1}{3}\,\frac{\rho}{3-\rho}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\ldots\right.$$
$$+(-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q}$$
$$\left.\times\frac{\rho}{(2q+3)(2q+3-\rho)}\,\frac{3^{2q+3}}{2^{5q+3}}+\ldots\right].$$

Nous allons tranformer le nombre entre crochets de la formule précédente en posant

$$\frac{\rho}{(2q-3)(2q+3-\rho)}=\frac{1}{4-\rho}-\frac{1}{2q+3}+\frac{2q-1}{(\rho-4)(2q+3-\rho)}.$$

égalité qui s'obtient en décomposant la fraction ration-

nelle en q

$$\frac{\rho}{(2q-1)(2q+3)(2q+3-\rho)}$$

en fractions simples ; nous obtenons alors

$$(15)\quad \log \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = n'(1+\varepsilon)\left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)} + \frac{27}{8}\frac{1}{4-\rho}P - Q + \frac{27}{8}\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)}R\right],$$

où nous avons

$$P = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}\right) + \ldots + (-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q\,2^q}\left(\frac{9}{16}\right)^q + \ldots = \left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4},$$

$$Q = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots + (-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q} \times \frac{1}{2q+3}\frac{1}{2^{3q}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2q+3} + \ldots = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

$$R = 1 + \ldots + (-1)^q \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+q-1\right)}{1.2\ldots q} \times \frac{\frac{3-\rho}{2}}{\frac{5-\rho}{2}+q-1}\left(\frac{9}{16}\right)^q + \ldots = F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right).$$

Le calcul numérique de Q se fait immédiatement : on a

$$Q = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-t^2)(1+t^2)^2}{2t^5}dt = -\log 2 + 2 - \frac{1}{128};$$

en portant ces valeurs dans l'égalité (15), on obtient, après quelques réductions,

$$(16)\quad \log \prod_{n'=1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$$
$$= n'(1+\varepsilon)\left[\log 2 - \frac{21}{8} - \frac{27}{4}\,\frac{1}{4-\rho} + \frac{27}{8}\,\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \times F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right)\right] = n'(1+\varepsilon)S.$$

La comparaison des égalités (13) et (16) nous donne alors, à la condition de prendre n' assez grand, pour que $n_0 \log r$ soit négligeable, ainsi que $\prod_{1}^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$;

$$M(r) \leq \prod_{1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)H_3}$$

où le nombre H_3 est égal à $L + S$; donc

$$(17)\quad H_3 = L + S = \frac{27}{4}\,\frac{1}{4-\rho} - \frac{9}{4(\rho-2)} \times F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right) + \frac{27}{8}\,\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \times F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right);$$

le calcul de ce nombre H_3 revient au calcul de deux séries qui convergent à la façon de progressions géométriques.

Enfin, on voit, comme au paragraphe précédent, que

$$n' = (1+\varepsilon')\frac{r^{[1+\beta(r)]\rho}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho}},$$

$[1+\beta(x)]\rho$ étant un exposant net; par suite, nous

obtenons l'inégalité

$$M(r) \leqq e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{3}\right)^{\rho} H_3 r^{[1+\beta(r)]\rho}}. \tag{18}$$

où H_3 est le nombre défini par l'égalité (17). L'égalité a lieu sur une infinité de cercles (avec $\varepsilon \gtrless 0$), si les arguments des zéros sont convenablement choisis et si $r_n = R_n$.

5. *Généralisation de quelques résultats de M. Lindelöf.* — M. Denjoy a également montré que le maximum $M(u)$ de $E(x, p)$, pour $|x| = u$, satisfait à l'inégalité

$$M(u) < e^{A u^{\tau}} \qquad (p \leqq \tau \leqq p+1);$$

le nombre A est inférieur ou égal à *un*, pour $p \geqq 2$ [1]; pour $p = 1$ on a $A \leqq v$, v désignant la racine de l'équation $x + \log(x-1) = 0$ ($v = 1,27, \ldots,$).

On peut, en appliquant ce résultat, préciser les résultats bien connus de M. Lindelöf; je les généraliserai en même temps en introduisant l'exposant net. En désignant toujours par n_0 un nombre tel que, pour $n > n_0$,

$$|\alpha(x)| < \eta, \qquad |x \log x\, \alpha'(x)| < \eta;$$

posons

$$M(r) = \prod_{1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_{1}^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n_0+1}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

n' étant défini ici par les inégalités

$$R_{n'} \leqq r < R_{n'+1}.$$

Nous aurons

$$\prod_{1}^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) < e^{h n_0 r^p};$$

(1) *Thèse*, page 24.

puis

$$\prod_{n_0+1}^{n'} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right) < e^{\mathrm{A}r^p \sum\limits_{n_0+1}^{n'} \frac{1}{\mathrm{R}_n^p}},$$

$$\prod_{n'+1}^{\infty} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right) < e^{\mathrm{A}r^{p+1} \sum\limits_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{R}_n^{p+1}}}.$$

En utilisant encore ici les inégalités

$$\sum_{n_0+1}^{n'} \frac{1}{\mathrm{R}_n^p} < \int_{n_0}^{n'} \frac{dx}{x^{\frac{p}{\rho}[1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho n'}{\rho - p} \frac{1}{\mathrm{R}_{n'}^p}(1-\varepsilon'),$$

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{R}_n^{p+1}} < \int_{n'}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{p+1}{\rho}[1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho n'}{p+1-\rho} \frac{1}{\mathrm{R}_{n'}^{p+1}}(1+\varepsilon'');$$

nous aurons, en prenant n' assez grand pour que $\frac{n_0 r^p}{n}$ soit très petit,

$$\mathrm{M}(r) < e^{\frac{\rho \mathrm{A}}{(p+1-\rho)(\rho-p)} n'(1+\varepsilon)}.$$

En introduisant l'exposant net, on a

$$n' = r^{\rho[1+\beta(r)]} - \theta \qquad (0 < \theta < 1);$$

donc, nous obtenons, pour les fonctions de genre supérieur ou égal à *deux*, l'inégalité

$$(19) \qquad \mathrm{M}(r) < e^{\frac{\rho(1+\varepsilon)}{(p+1-\rho)(\rho-p)} r^{\rho[1+\beta(r)]}},$$

et pour les fonctions de genre *un*

$$(20) \qquad \mathrm{M}(r) < e^{\frac{1,27\rho(1+\varepsilon)}{(p+1-\rho)(\rho-p)} r^{\rho[1+\beta(r)]}}.$$

L'inégalité (19) peut être utilisée pour les fonctions de genre supérieur à *deux*, pour lesquelles le calcul d'une limite supérieure précise paraît beaucoup plus

compliqué que pour les fonctions considérées précédemment. Il résulte d'ailleurs des calculs du paragraphe 2 que la limite supérieure exacte du logarithme de $M(r)$, est, quel que soit le genre, de la forme $Kr^{\rho[1+\beta(r)]}$, où $\rho[1+\beta(x)]$ est un exposant net, et K une fonction de ρ seulement, et non de $\beta(x)$.

Enfin, le théorème de M. Jensen donne

$$M(r) > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} > \left(\frac{r}{r_n}\right)^n,$$

quel que soit le nombre entier n. En désignant par n'' le nombre des zéros intérieurs au cercle de rayon $\frac{r}{h}$, on aura

$$M(r) > h^{n''};$$

la considération des cas où l'on aurait

$$r_n = n^{\frac{1-\alpha(n)}{\rho}},$$

quel que soit n, conduit à prendre $h = e^{\frac{1}{\rho}}$; or, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

si donc nous prenons r de façon que

$$n'' = \left(\frac{r}{\frac{1}{e^{\rho}}}\right)^{\rho\left[1+\beta\left(\frac{r}{\frac{1}{e^{\rho}}}\right)\right]} = \frac{(1+\varepsilon)\, r^{\rho[1+\beta(r)]}}{e},$$

nous aurons, pour une *infinité de valeurs de z*,

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{e\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]}}. \tag{21}$$

L'inégalité (21) est d'ailleurs la plus précise qu'on puisse obtenir. Il suffit, en effet, de reproduire en le

modifiant un peu le raisonnement employé par M. Lindelöf à la page 64 de son Mémoire, pour voir qu'il existe des fonctions d'exposant net $\rho[1+\beta(x)]$, et pour lesquelles on a, à partir d'une certaine valeur de r,

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{\rho e} r^{\rho(1+\beta(r))}}.$$

En résumé, on voit qu'étant donnée une fonction d'exposant net $\rho[1+\beta(x)]$, *la limite supérieure pour r infini de l'expression*

$$\frac{M(r)}{r^{\rho(1+\beta(r))}}$$

est supérieure ou égale au nombre $\frac{1}{e\rho}$ *et inférieure ou égale à un nombre* K. *Ce nombre* K *est égal à* $\frac{\pi}{\sin \pi\rho}$ (¹) *lorsque le genre est zéro; à*

$$\frac{1}{2^\rho}\left[\frac{4}{2-\rho}+2\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^q}\right] = \frac{2^{2-\rho}}{2-\rho}+\frac{2^{1-\rho}}{\rho-1}F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right),$$

lorsque le genre est égal à un; à

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho}\frac{2}{4-\rho}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2-\rho}\frac{F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right)}{\rho-2}$$
$$+\left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho}\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right)}{(4-\rho)(3-\rho)},$$

lorsque le genre est deux; enfin K *est inférieur à*

$$\frac{\rho}{(p-1-\rho)(\rho-p)},$$

lorsque le genre p est supérieur à deux.

(¹) *Voir* l'article déjà cité des *Nouvelles Annales*.

Dans le cas où, quel que soit $n < n_0$, on a

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

le dernier calcul du paragraphe 2, appliqué à l'inégalité de Jensen donne

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]}},$$

cette inégalité est la plus précise qu'on puisse obtenir, tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur les arguments des zéros ([1]).

On peut également introduire le nombre des zéros compris dans le cercle de rayon r : soit n ce nombre ; pour une infinité de valeurs du nombre n'' défini plus haut, on a

$$n'' = \frac{r^{\rho[1+\beta(r)]}}{e}(1+\varepsilon),$$

et comme $n \leq r^{\rho[1+\beta(r)]}$, nous aurons

$$n'' > \frac{n}{e}(1+\varepsilon), \qquad r^{\rho[1+\beta(r)]} < en(1+\varepsilon);$$

et, par suite,

$$(22) \qquad (1-\varepsilon)\frac{1}{\rho e}n < \log M(r) < (1+\varepsilon)Ken,$$

inégalité valable pour une infinité de valeurs de n. Cette double inégalité pourra servir dans l'énoncé des réciproques; tous les résultats de M. Lindelöf relatifs au cas où

$$r^{\rho[1+\beta(r)]} = A\, r^{\rho}(\log r)^{\alpha_1}(\log_2 r)^{\alpha_2}\ldots(\log_k r)^{\alpha_k},$$

s'étendent immédiatement au cas général.

([1]) On le voit en appliquant la méthode employée par M. Lindelöf (p. 68).

[R8a]

SUR LES INTÉGRALES DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Les intégrales premières, autres que celle des forces vives, que l'on rencontre constamment dans les problèmes de dynamique sont celles qui sont fournies par les théorèmes classiques des projections ou des moments des quantités de mouvement et il faut y ajouter l'intégrale très fréquemment fournie par les équations d'Euler dans le cas des solides de révolution.

Je me propose de montrer qu'en utilisant la notion de vitesse d'un système de vecteurs, on peut définir une catégorie générale d'intégrales premières linéaires dont toutes celles que nous venons de signaler ne sont que des cas particuliers et dont nous donnerons l'expression générale au moyen de la force vive.

2. Considérons un système matériel dont la quantité de mouvement est le système Q de vecteurs, Q′ étant la vitesse de Q.

Soit, d'autre part, S un système variable de vecteurs choisi arbitrairement, et S′ sa vitesse.

On a la formule

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}) = \mathrm{M}^{t}(\mathrm{S}', \mathrm{Q}) + \mathrm{M}^{t}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}').$$

Mais nous avons la propriété cinématique, exprimée par l'égalité géométrique

$$(\mathcal{J}) + (\mathrm{Q}') = 0,$$

et la propriété dynamique, exprimée par l'égalité géométrique

$$(\mathfrak{J}) + (\mathfrak{F}_{d,l}) = 0,$$

$\mathfrak{J}$ étant le système des forces d'inertie et $\mathfrak{F}_{d,l}$ le système des forces données et de liaison. On en déduit

$$(Q') = (\mathfrak{F}_{d,l}), \tag{2}$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (1) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}) = \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(\mathrm{S}', \mathrm{Q}) + \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(\mathrm{S}, \mathfrak{F}_{d,l}). \tag{3}$$

La formule (2) constitue ce que nous appellerons le *théorème général des quantités de mouvement* et la formule (3) ce que nous appellerons le *théorème général des moments des quantités de mouvement.*

3. Si l'on applique au système Q la construction indiquée de sa vitesse au moyen de la réduction en un point fixe, on retrouve immédiatement, en vertu de la formule (2), la représentation géométrique classique des théorèmes sur les quantités de mouvement.

Si l'on applique la formule (3) à un *couple fixe*, la vitesse S' est nulle et les moments se réduisent aux projections sur une droite fixe de sorte qu'on retrouve le théorème des projections des quantités de mouvement.

Si l'on applique la même formule à un *vecteur fixe,* la vitesse S' est encore nulle et l'on retrouve le théorème ordinaire des moments des quantités de mouvement.

4. Si *la condition dynamique*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(\mathrm{S}, \mathfrak{F}_{d,l}) = 0$$

et *la condition cinématique*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(\mathrm{S}', \mathrm{Q}) = 0$$

sont à chaque instant réalisées simultanément, l'égalité (3) devient

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathrm{Q}) = 0$$

et donne l'intégrale première

$$\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathrm{Q}) = \text{const.}, \tag{4}$$

que, sous cette forme générale, nous appellerons *intégrale des quantités de mouvement.*

5. En distinguant les forces de liaison des forces données, la condition dynamique peut s'écrire

$$\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathcal{F}_d) + \mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathcal{F}_l) = 0,$$

elle doit avoir lieu à priori sans connaître le mouvement réellement pris par le système, c'est-à-dire sans connaître les forces de liaison, comme conséquence de la nature du système $\mathcal{F}_d$, et de la seule chose que l'on connaisse sur $\mathcal{F}_l$, à savoir que son travail est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons en supposant, ce que nous ferons toujours, que les liaisons ont lieu sans frottement.

La condition se décompose donc en deux autres :

La première

$$\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathcal{F}_d) = 0$$

ne donne lieu à aucune remarque, elle est ou n'est pas vérifiée suivant la nature de S et des forces données;

Pour que la seconde soit vérifiée, il faut que l'égalité

$$\mathrm{M}^{t}(\mathrm{S},\mathcal{F}_l) = 0$$

soit une conséquence de

$$\text{Travail virtuel de } \mathcal{F}_l = 0,$$

ce qui exige que ce travail virtuel puisse s'exprimer

sous forme de moment. Ce fait ne se présente à priori que dans le déplacement d'un solide ou plus généralement dans un *déplacement d'ensemble d'un système matériel*. Ce déplacement, qui a les mêmes propriétés que les vitesses d'un point d'un solide, pourra se représenter par

$$S\varepsilon,$$

S étant un système de vecteurs dépendant de la position du système et ε un facteur infiniment petit qui doit être considéré comme une variable indépendante. Pour ce déplacement virtuel d'ensemble que nous supposons constamment compatible avec les liaisons, on aura

$$\mathfrak{T}(\vec{\mathcal{F}}_l) = \mathrm{M}^t(S\varepsilon, \vec{\mathcal{F}}_l) = \varepsilon \mathrm{M}^t(S, \vec{\mathcal{F}}_l) = 0;$$

donc :

Pour que la condition dynamique soit remplie par les forces de liaison il faut et il suffit que $S\varepsilon$ *soit constamment un déplacement virtuel d'ensemble compatible avec les liaisons.*

6. La condition cinématique

$$\mathrm{M}^t(S', Q) = 0$$

doit être remplie à priori, c'est-à-dire quel que soit le mouvement compatible avec les liaisons. On peut trouver des cas très généraux où il en est ainsi :

1° S *est un système fixe.*

La condition est bien réalisée car S' est un système nul.

2° S *est un système invariable entraîné par la translation du centre de gravité.*

Réduisons simultanément S et Q au centre de gravité, ce qui donne R, G et ρ', γ ; R et G sont invariables en grandeur et direction et subissent la translation $\frac{\rho}{M}$ du centre de gravité (M masse totale). Dans

cette translation, le couple G reste équipollent à lui-même et ne donne rien pour S′ qui se réduit à la vitesse du vecteur R c'est-à-dire à un couple G′ perpendiculaire au plan R, ρ. On a alors

$$M^t(S', Q) = M^t(G', \rho) + M^t(G', \gamma),$$

le premier terme est nul comme moment d'un couple et d'un vecteur orthogonaux et le second comme moment de deux couples de sorte que la condition cinématique est bien réalisée.

3° *Le système matériel est un solide ayant un point fixe et S est un vecteur attaché au solide sur un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie du point fixe.*

Réduisons simultanément S et Q au point fixe O, ce qui donne R et ρ, γ. Soient Oz l'axe de révolution et $O\omega$ la vitesse du solide. Les expressions bien connues des composantes de γ sur les axes de l'ellipsoïde montrent que γ est dans le plan $zO\omega$. La vitesse S est ici celle du vecteur R attaché au solide sur Oz, dont l'origine O est fixe et qui subit la rotation ω ; elle se réduit à un vecteur R′ perpendiculaire au plan R, ω, c'est-à-dire au plan $zO\omega$ qui contient γ.

On a

$$M^t(S', Q) = M^t(R', \rho) + M^t(R', \gamma);$$

le premier terme est nul comme moment de deux vecteurs concourants et le second comme moment d'un vecteur et d'un couple orthogonaux, de sorte que la condition cinématique est bien réalisée.

4° *Le système matériel est un solide et S est un vecteur attaché à ce solide sur un axe de révolution de son ellipsoïde central d'inertie.*

Faisons la réduction de Q au centre de gravité G, nous obtiendrons un vecteur ρ et un couple γ. Si nous

faisons la réduction analogue de la vitesse du solide, nous aurons la rotation ω et la translation $\frac{\rho}{M}$ et nous verrons encore que γ est dans le plan zG, ω Gz étant l'axe de révolution.

La vitesse du vecteur R attaché au solide sur Gz se compose d'un vecteur R' perpendiculaire au plan R, ρ donc perpendiculaire à ρ.

Dans l'expression

$$M^t(S, Q) = M^t(R', \rho) + M^t(R', \gamma) + M^t(G', \rho) + M^t(G', \gamma),$$

le premier terme est nul comme moment de deux vecteurs concourants, le quatrième comme moment de deux couples et les deux autres comme moments d'un vecteur et d'un couple orthogonaux, de sorte que la condition cinématique est toujours réalisée.

7. Un déplacement virtuel infiniment petit d'un système matériel est défini par un système d'accroissements δq des paramètres q qui définissent sa position. Si l'on multiplie tous les δq par une même quantité, on obtient un déplacement virtuel qui n'est pas distinct du premier. On peut dire que ce déplacement est défini par

$$\frac{\delta q_1}{\lambda_1} = \frac{\delta q_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\delta q_n}{\lambda_n} = \varepsilon,$$

les λ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui contiennent implicitement un facteur indéterminé $\theta(q_1, \ldots, q_n)$ et ε étant une variable indépendante infiniment petite.

Supposons que ce déplacement virtuel soit un déplacement d'ensemble et considérons les déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ des points du système, ils possèdent la propriété fondamentale des moments ; si, dans ces expressions des $\delta x, \delta y, \delta z$, on supprime le facteur ε, on remplace le déplacement de chaque point par un vecteur fini et ces vecteurs possèdent aussi la propriété des

moments, donc sont les moments d'un certain système S et les déplacements des points sont les moments de Sε.

Ce système S est défini à un facteur θ près. La condition dynamique, étant relative à S, contient θ en facteur, donc est ou n'est pas réalisée sans avoir à préciser la valeur de ce facteur, Il n'en est pas de même de la condition cinématique car celle-ci est relative à S' qui varie avec θ. On a, en effet,

$$(S\theta)' = S\frac{d\theta}{dt} + \theta S',$$

donc

$$M'[(S\theta)', Q] = \frac{d\theta}{dt}M'(S, Q) + \theta M'(S', Q).$$

Si le moment est nul pour S', il ne le sera pas en général pour $(S\theta)'$.

Nous voyons ainsi que le facteur θ se trouve déterminé par la condition cinématique.

8. Supposons donc que le déplacement virtuel d'ensemble Sε satisfaisant aux conditions dynamique et cinématique soit défini par

$$\delta q_1 = \lambda_1\varepsilon, \quad \ldots, \quad \delta q_n = \lambda_n\varepsilon,$$

les λ étant des fonctions bien déterminées de q et de t.

L'intégrale des moments correspondante pourra s'écrire

$$\frac{1}{\varepsilon}M'(S\varepsilon, Q) = \text{const.}$$

Le moment qui y figure est le travail du système Q de vecteurs dans le déplacement d'ensemble Sε; c'est donc la quantité

$$\sum m(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z)$$

étendue à tout le système matériel. En raisonnant comme pour l'établissement des équations de Lagrange,

on l'écrit sous les formes successives

$$\sum \delta q \left[\sum m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q} \right) \right],$$

$$\sum \delta q \left[\sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right) \right],$$

$$\sum \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} \delta q,$$

ou enfin

$$\varepsilon \sum \lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'},$$

de sorte que l'expression analytique de l'intégrale des quantités de mouvement est

$$\sum \lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} = \text{const.}$$

9. Cette forme analytique donne l'explication du fait bien connu que, la plupart du temps, les intégrales de quantités de mouvement ou les intégrales d'Euler qu'on aperçoit à priori sont données analytiquement et d'une façon immédiate par les équations de Lagrange comme conséquence de ce qu'un des paramètres ne figure pas dans le travail virtuel et ne figure que par sa dérivée dans la force vive.

Cela provient de ce que le déplacement virtuel d'ensemble correspondant est relatif à la variation d'un seul paramètre, q_1 par exemple, et a pour équations

$$\delta q_1 = \varepsilon, \qquad \delta q_2 = \ldots = \delta q_n = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

et que l'intégrale des quantités de mouvement a la forme simple

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} = \text{const.}$$

Considérons alors l'équation de Lagrange relative à q_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1;$$

Q_1 est le travail de $\mathcal{F}_d$ dans le déplacement $S\varepsilon$, il est nul en vertu de la condition dynamique ; d'autre part, quelle que soit la solution choisie, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = 0;$$

il en résulte

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0,$$

qui, devant avoir lieu pour toute solution, c'est-à-dire quels que soient les q et les q', montre que q_1 ne figure pas dans T. L'équation de Lagrange relative à q_1 se réduisait donc d'elle-même à la forme simple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = 0$$

et donnait bien l'intégrale considérée des quantités de mouvement comme intégrale immédiate.

10. A un point de vue tout élémentaire et pratique, une intégrale des quantités de mouvement n'est visible à priori sans aucun calcul que si la condition dynamique est réalisée par suite de la disposition des forces données sans se préoccuper de leurs intensités et ce fait, qui existe toujours pour les forces données *intérieures*, ne peut se produire pour des forces données *extérieures* que si S est un couple auquel toutes les formes sont orthogonales ou si S est un vecteur rencontré par toutes les forces. Si d'ailleurs S, représentant un déplacement d'ensemble, ne vérifie pas complètement les conditions caractéristiques des cinq catégories du paragraphe 6, mais si sa ligne d'action quand S est un

vecteur, ou sa direction quand c'est un couple, vérifie ces conditions, l'intensité seule de S contient le facteur θ qui peut ainsi être déterminé de façon qu'elle soit constante. Il suffit donc, pour l'existence de l'intégrale, de faire ces hypothèses plus simples, de sorte que, au point de vue pratique, nous avons cinq catégories d'intégrales :

1° Le système admet dans chaque position une translation virtuelle d'ensemble suivant une direction fixe à laquelle toutes les forces données extérieures sont orthogonales.

C'est l'intégrale classique du centre de gravité. Nous l'appelons *intégrale de translation*.

2° Le système admet, dans chaque position, une rotation virtuelle d'ensemble autour d'une droite fixe rencontrée par toutes les forces données extérieures.

C'est l'intégrale classique des aires. Nous l'appelons *intégrale de rotation*.

3° Le système admet, dans chaque position, une rotation virtuelle d'ensemble autour d'une droite subissant la translation du centre de gravité et rencontrée par toutes les forces données extérieures.

Nous dirons qu'on a alors une intégrale de rotation de seconde espèce.

Ces intégrales nouvelles, auxquelles conduit tout naturellement la théorie générale développée précédemment, sont classiques dans le cas très particulier où l'axe de la rotation virtuelle d'ensemble passe par le centre de gravité. Mais elle se présente très fréquemment sous sa forme générale ; c'est, par exemple, ce qui arrive dans le mouvement d'une sphère homogène pesante pouvant librement rouler et pivoter sans glisser sur un plan incliné fixe : on a l'intégrale de rotation de seconde espèce pour la ligne de plus grande pente menée par le point de contact de la sphère.

4° Le système est un solide ayant un point fixe pour lequel l'ellipsoïde d'inertie possède un axe de révolution Δ. Le solide possède une rotation virtuelle autour de cet axe Δ qui est rencontré par toutes les forces données.

C'est l'intégrale classique d'Euler qui exprime que la composante sur Δ de la rotation ω est constante.

5° Le système est un solide dont l'ellipsoïde central d'inertie possède un axe de révolution Δ. Le solide possède une rotation virtuelle autour de cet axe Δ qui est rencontré par toutes les forces données.

C'est encore l'intégrale classique d'Euler qui exprime que la composante de la rotation ω sur l'axe Δ est constante.

Pour abréger, nous désignerons ces cinq catégories par les lettres T, R, R', E, E'.

11. L'importance considérable des intégrales de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \text{const.},$$

fournies par les équations de Lagrange quand certains paramètres n'y figurent pas par eux-mêmes, provient de ce que ces intégrales permettent l'élimination immédiate des paramètres correspondants, ce qui constitue une réduction du problème qui peut même donner l'intégration complète par quadratures, quand on a l'intégrale des forces vives et $n - 1$ telles intégrales immédiates.

On est alors amené à se poser la question suivante :

Un problème de dynamique possède un groupe d'intégrales de quantités de mouvement des catégories T, R, R', E, E'; *est-il possible de choisir les paramètres de façon que ces intégrales se présentent*

toutes simultanément sous la forme immédiate

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \text{const.?}$$

Si le groupe d'intégrales possède cette propriété, nous conviendrons, pour abréger, de dire que c'est un *groupe normal*. Supposons qu'il en soit ainsi.

Chaque intégrale du groupe sera défini par un déplacement virtuel dans lequel les λ seront tous nuls sauf un qui sera égal à l'unité, c'est-à-dire dont tous les δq seront nuls sauf un égal à ε. A chacune d'elles correspondra ainsi un paramètre q. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ces paramètres.

Quels que soient les q, si l'on donne à l'un quelconque des paramètres $q_1, \ldots, q_r$ un accroissement infiniment petit, le déplacement du système est un déplacement d'ensemble, c'est-à-dire pour lequel la variation δl de la distance de deux molécules quelconques est nulle, de sorte que l est indépendant de $q_1, \ldots, q_r$ et les paramètres se décomposeront en deux groupes; $q_{r+1}, \ldots, q_n$ seront les paramètres de forme et $q_1, \ldots, q_r$ les paramètres de position. Si, ayant fixé les paramètres de forme, on fait varier d'une façon quelconque les paramètres de position, on a un solide à r paramètres et la vitesse paramétrique V_i de ce solide, c'est-à-dire sa vitesse quand on fait varier seulement le paramètre q_i considéré comme étant le temps, est précisément le système S_i de l'intégrale correspondant à ce paramètre. Donc :

Pour que des intégrales de quantités de mouvement d'un même problème de dynamique forment un groupe normal, il faut que les systèmes S *correspondants puissent être considérés comme les vitesses paramétriques d'un même solide.*

Comme un solide dépend au plus de six paramètres,

on voit qu'un groupe normal d'intégrales de quantités de mouvement contient, au maximum, six intégrales.

12. Considérons un point dépendant de deux paramètres u, v et supposons que ses vitesses paramétriques soient les moments de deux systèmes fixes de vecteurs U et V que nous supposerons être simplement des vecteurs ou des couples. U et V peuvent évidemment être deux couples fixes : c'est le cas du point dans un plan, u, v étant ses coordonnées cartésiennes.

Supposons que U soit un vecteur fixe que nous prendrons pour Oz. Les coordonnées de U et V seront

U...........	0	0	ω	0	0	0
V...........	p	q	r	ξ	η	ζ

toutes ces quantités étant des constantes. En exprimant de deux façons les vitesses paramétriques du point, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\omega y, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \xi - qz - ry,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \quad \omega x, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \eta - rx - pz,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \zeta + py - qx,$$

et en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, celles de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ et celles de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$,

$$\omega p z = \quad \omega \eta,$$

$$\omega q z = -\omega \xi,$$

$$0 = \quad \omega p x + \omega q y.$$

Si le point ne décrit pas un plan parallèle à xOy, z est variable et les deux premières exigent

$$p = q = \xi = \eta = 0.$$

Si, au contraire, z décrit un plan parallèle à xOy, x et y sont des variables indépendantes puisque le point dépend effectivement de deux paramètres et la troisième montre que p et q sont nuls, ce qui entraîne ξ, η nuls d'après les deux premières. On a donc toujours la même conclusion.

Si $r = 0$, V est un couple parallèle au vecteur U.

Si r n'est pas nul, V n'est pas un couple et nous devons seulement examiner si V peut être un vecteur; la relation quadratique fondamentale se réduit à

$$r\zeta = 0$$

et donne $\zeta = 0$, de sorte que V aurait même ligne d'action, Oz, que U. En faisant varier u ou en faisant varier v, on aurait les mêmes déplacements; donc le point ne dépendrait, en réalité, que d'un seul paramètre.

Il n'y a donc que deux hypothèses à faire :

Ou bien U et V sont deux couples fixes;

Ou bien U et V sont un vecteur et un couple qui sont fixes et parallèles.

13. Considérons maintenant un solide à deux paramètres u, v dont les vitesses paramètres seront les deux systèmes U et V de vecteurs, systèmes qui seront supposés réductibles, soit à un couple, soit à un vecteur unique. Les vitesses paramétriques d'un point quelconque du solide sont les moments de U et V; donc on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent, de sorte que si U et V sont fixes, ces deux systèmes sont deux couples ou bien un vecteur et un couple parallèles.

Supposons que U et V soient deux vecteurs subissant la translation du centre de gravité. Considérons le trièdre T attaché au solide et le triède T′ parallèle à T

mais ayant une origine fixe; il dépendra des deux paramètres u, v et ses vitesses paramétriques U′, V′ sont deux rotations équipollentes à U et V. U′ et V′ sont alors deux vecteurs fixes qui, d'après ce qui a été trouvé au paragraphe précédent, ont forcément même direction de sorte que U et V sont parallèles.

Si U et V sont un vecteur fixe et un vecteur entraîné par la translation du centre de gravité, la démonstration précédente s'applique encore, U et V sont parallèles. Prenons pour Oz le vecteur fixe U et considérons les deux vitesses paramétrique du centre de gravité (a, b, O); la seconde est forcément constante en grandeur et direction; on a donc

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\omega b, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = c,$$
$$\frac{\partial b}{\partial v} = \quad \omega a, \qquad \frac{\partial b}{\partial v} = c';$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$c = c' = 0.$$

La seconde vitesse paramétrique du centre de gravité étant nulle, c'est qu'il se trouve sur V. Ainsi : si U est un vecteur fixe et V un vecteur subissant la translation du centre de gravité, U et V sont parallèles et V passe par le centre de gravité.

Supposons enfin que U et V soient deux vecteurs concourants attachés au solide, le même raisonnement prouverait leur parallélisme; donc U et V auraient même ligne d'action et le solide ne dépendrait que d'un paramètre. Il y a donc impossibilité.

14. Les propriétés précédentes vont nous permettre de préciser la composition d'un groupe normal d'intégrales T, R, R′, E, E′; mais auparavant, il est nécessaire

de faire une remarque dans le cas où il y a deux intégrales R′ parallèles. Soient ρ et ρ_1 les deux vecteurs parallèles unitaires et de sens contraires portés sur les deux axes entraînés par le centre de gravité. Les deux intégrales sont

$$M^t(\rho, Q) = \text{const.}, \qquad M^t(\rho_1, Q) = \text{const.};$$

elles peuvent se remplacer par deux combinaisons linéaires quelconques à coefficients constants et, en particulier, par

$$M^t(\rho, Q) = \text{const.}, \qquad M^t(\rho, Q) + M^t(\rho_1, Q) = \text{const.}$$

Or la seconde peut s'écrire

$$M^t[(\rho, \rho_1), Q] = \text{const.}$$

et comme ρ, ρ_1 forment un système invariable subissant la translation du centre de gravité et que ρ et ρ_1 sont égaux, parallèles et de sens contraires, l'ensemble $\rho\,\rho_1$ est un couple subissant une translation, c'est-à-dire un couple fixe, de sorte que deux intégrales R, R′ parallèles peuvent se remplacer par l'une d'elles et par une intégrale T perpendiculaire. En tenant compte de ce fait et supposant toujours cette réduction réalisée, on peut dire, comme conséquence immédiate du paragraphe précédent :

Un groupe normal ne contient jamais plus d'une intégrale de chacune des catégories R, R′, E, E′ *et contient au plus trois intégrales* T.

Si le groupe contient une intégrale R, *il contient au plus une intégrale* T *qui doit être parallèle à* R *et, s'il contient une intégrale* R′, R′ *doit aussi être parallèle à* R.

Si un groupe normal contient une intégrale R, il peut contenir au plus une intégrale T, une intégrale R′ et

une intégrale E ou E′ ; il est donc, au plus, d'ordre 4.

S'il ne contient pas d'intégrale R, il contient au plus une intégrale R′, une intégrale E ou E′ et trois intégrales T, de sorte qu'il est au maximum d'ordre 5 ; donc *l'ordre maximum d'un groupe normal d'intégrales* T, R, R′, E, E′ *est cinq*.

On peut distinguer des cas précis :

1° Le système n'a pas de point fixe et, si c'est un solide, son ellipsoïde central n'est pas de révolution.

On n'a pas d'intégrales d'Euler, de sorte qu'on ne peut avoir que des groupes normaux d'ordre maximum 4, s'il n'y a pas d'intégrale R, et d'ordre maximum 3, s'il y a une intégrale R.

2° Le système a un point fixe et, s'il est solide, l'ellipsoïde d'inertie de ce point n'est pas de révolution.

Il n'y a pas d'intégrale d'Euler ; les déplacements d'ensemble ne peuvent être que des rotations autour d'axes passant par le point fixe ; donc il est impossible d'avoir des intégrales T et R′. Un groupe normal ne pourra être composé que d'une seule intégrale R ; le problème peut comporter deux ou trois intégrales de cette nature autour du point fixe, chacune d'elles forme à elle seule un groupe normal, mais leur ensemble ne forme jamais un tel groupe.

3° Le système est un solide dont l'ellipsoïde central est de révolution.

On peut alors avoir des intégrales de toutes les catégories ; c'est le seul cas où l'on puisse trouver parfois un groupe normal de l'ordre maximum cinq.

4° Le système est un solide ayant un point fixe pour lequel l'ellipsoïde d'inertie est de révolution.

D'après ce qui a été dit dans le second cas, il n'y a pas d'intégrales T et R′ et un groupe normal se composera au plus d'une intégrale R et d'une intégrale E.

5° Le système se réduit à un point matériel. Les intégrales R′ et E′ n'ont pas de sens; il ne peut y avoir que des intégrales T et R.

Un groupe normal sera composé uniquement d'intégrales T et sera au maximum d'ordre 3 ou sera composé d'une intégrale R et, au plus, d'une intégrale T parallèle à R, il sera au maximum d'ordre 2.

15. Ce qui précède montre pourquoi des problèmes qui paraissent extrêmement voisins, possédant tous deux l'intégrale des forces vives et un même nombre d'intégrales de quantités de mouvement, sont, en réalité, tout à fait dissemblables au point de vue de l'intégration. Cela tient à ce que, pour l'un, les intégrales des quantités de mouvement forment un groupe normal tandis que, pour l'autre, l'ensemble de ces intégrales ne peut former un tel groupe, de sorte qu'à ce point de vue le fait d'en avoir plusieurs n'a aucune importance; il ne pourra être utilisé qu'au moyen d'artifices particuliers au problème considéré.

Comme exemple, il suffit de citer les deux cas classiques de Lagrange et d'Euler pour le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

La connaissance à priori d'un groupe normal d'intégrales de quantités de mouvement sert pour la réduction et l'intégration des équations à condition que les paramètres soient choisis de façon que toutes les intégrales du groupe soient simultanément sous forme immédiate. Il en résulte que cette recherche des intégrales de quantités de mouvement doit se faire au début du problème, avant même de choisir les paramètres, puisque ce sont les résultats qu'elle donnera qui guideront le choix de ces paramètres.

On commencera par choisir comme on voudra les

paramètres de forme du système matériel. On sera alors ramené à un solide dont on connaîtra à priori des translations ou rotations paramétriques. A chaque translation on fera correspondre, comme paramètre, le déplacement fini d'un point du système, estimé suivant cette direction; à chaque rotation on fera correspondre l'angle de rotation, et, de cette façon, on aura bien des paramètres tels que chaque déplacement relatif à une intégrale du groupe soit déterminé par des λ tous nuls, sauf un égal à l'unité et toutes ces intégrales se présenteront sous forme immédiate [1].

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Soient* Δ *une droite donnée.* O *un point fixe sur cette droite.*

Déterminer les surfaces S *telles que la trace du plan tangent en un point quelconque* M, *sur le plan* ΔOM, *coupe le rayon vecteur* OM *suivant un angle donné* α.

La recherche des surfaces S *se ramène à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles* E; *indiquer comment on peut engendrer les*

---

[1] Les propriétés exposées dans les paragraphes 11, 12, etc., sont des cas particuliers, exposés élémentairement, de propriétés plus générales signalées dans une Note *Sur les intégrales linéaires des équations de Lagrange*, présentée à l'Académie des Sciences (3 juillet 1911) et qui seront développées ultérieurement dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure.*

surfaces S *à l'aide d'une caractéristique choisie de cette équation.*

II. *Les surfaces* Σ *qui coupent les rayons vecteurs issus d'un point donné* O *sous un angle donné sont les intégrales d'une équation* F *aux dérivées partielles du premier ordre.*

1° *L'équation* F *admet-elle des surfaces* S *comme solutions particulières?*

2° *Déterminer les surfaces* Σ.

Comment une surface Σ *peut-elle être engendrée à l'aide d'une caractéristique choisie, par seul déplacement du plan de cette courbe? Quelles sont ses lignes de courbure?*

3° *Une surface* Σ *déterminée peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe de surfaces* S *ou* Σ *particulières.*

On peut toujours choisir la famille d'enveloppées de telle sorte qu'en tout point de contact l'enveloppe et l'enveloppée aient mêmes centres de courbure principaux.

4° *Toute surface* Σ *peut être obtenue comme intégrale commune à l'équation* F *et à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'origine est analogue à celle de l'équation* E.

Solution par M. C. CLAPIER.

I. Supposons que OΔ soit la verticale du point O, pris comme origine des coordonnées. Déterminons le point M par son rayon vecteur OM $= r$, sa cote z et sa distance à l'axe Δ, $\rho = \sqrt{x^2 e y^2}$.

Le plan tangent au point M d'une surface S passe par une droite déterminée MT située dans le plan ΔOM et faisant avec OM un angle donné α. Il en résulte que

les surfaces S doivent satisfaire à une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire.

Pour obtenir cette équation, désignons par T le point de rencontre du plan avec Δ, l'axe des z et posons

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Si M_1 est la projection de M sur l'axe Δ, nous aurons

$$M_1 T = -px - qy$$

et, si l'on désigne par θ la latitude du point M,

$$\widehat{M_1 M T} = \pi - \alpha - \theta;$$

il en résulte

$$px + qy = \rho \operatorname{tang}(\alpha + \theta).$$

Substituons $\operatorname{tang}\theta = \frac{z}{\rho}$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles E,

$$(1) \qquad px + qy = \rho\,\frac{\rho + kz}{\rho k - z}, \qquad k = \cot\alpha.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\rho\,\dfrac{\rho + kz}{\rho k - z}}.$$

On déduit une première intégrale,

$$(2) \qquad y = x \operatorname{tang}\varphi,$$

et une combinaison intégrale

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\rho^2} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dz}{\rho\,\dfrac{\rho + kz}{\rho k - z}};$$

par suite

$$\rho\,d\rho + z\,dz = k(\rho\,dz - z\,d\rho),$$

$$d\log(\rho^2 + z^2) = 2k\,d\operatorname{arctang}\frac{z}{\rho};$$

$$(3) \qquad r = c e^{k\theta}.$$

Comme il était facile de le prévoir *a priori*, le lieu du point M dans le plan MOΔ déterminé par l'angle φ, est une spirale logarithmique de pôle O et coupée sous l'angle α par le rayon vecteur.

L'équation (3) représente une infinité de pareilles courbes, qui peuvent se déduire de l'une d'elles soit par homothétie, soit par une rotation autour du pôle.

Les surfaces S sont déterminées par la congruence des courbes (2) et (3) qui contiennent les constantes arbitraires φ et c.

Une surface S sera engendrée par une des logarithmiques précédentes dont le plan tourne autour de l'axe Δ, pendant qu'elle-même est animée d'un mouvement de rotation autour de son pôle.

Si l'on suppose c constant nous avons les surfaces S' engendrées par la révolution des logarithmiques autour d'un axe Δ de leur plan. Leur équation est

$$r = ce^{k \arccos \frac{\rho}{r}}. \tag{4}$$

II. Une surface Σ' est telle qu'en un point M le plan tangent touche le cône de révolution engendré par MT tournant autour du rayon vecteur OM. Elle doit donc vérifier une équation aux dérivées partielles F.

Pour former celle-ci nous prendrons trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques passant par O et nous substituerons la variable r à z, de manière à poser

$$dr = p\,dx + q\,dy.$$

Avec ce changement de variables, nous aurons

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = \frac{r(px+qy) - r^2}{z},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{r^2(1+p^2+q^2) - 2r(px+qy)}{z^2}.$$

Et, si nous exprimons que le rayon vecteur coupe la surface Σ sous l'angle α, nous obtenons l'équation F,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & r\sin^2\alpha[r(1+p^2+q^2)-2(px-qy)] \\ & \qquad\qquad -(px+qy-r)^2=0. \end{aligned} \right.$$

Elle est de la forme

$$F(px+qy, z, p, q)$$

et les équations de Cauchy nous donnent

$$(6)\qquad \frac{dp}{p}=\frac{dq}{q};\qquad \frac{p}{p_0}=\frac{q}{q_0}=\frac{1}{s}.$$

Cette intégrale nous permettra d'intégrer par la méthode de Lagrange.

L'équation

$$dr-p\,dx-q\,dy=0,$$

ou bien

$$s\,dr-dt=0,\qquad t=p_0x+q_0y,$$

pourra être intégrée. Il suffit de calculer s à l'aide de (5); on trouve

$$s=\frac{t}{r}+\frac{\sqrt{r^2(p_0^2 e q_0^2)-t^2}}{r\cot\alpha}.$$

Nous prenons le signe $+$ devant le radical et nous substituons cette valeur dans l'équation

$$s\,dr-dt=0;$$

il vient

$$(r\,dt-t\,dr)\cot\alpha=\left[\sqrt{r^2(p_0^2 e q_0^2)-t^2}\right]dr,$$

$$\frac{dr}{r}=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{p_0^2+q_0^2-\frac{t^2}{r^2}}}\,d\frac{t}{r},$$

$$\log\frac{r}{c}=\cot\alpha\arccos\frac{t}{r}\,\frac{1}{\sqrt{p_0^2 e q_0^2}}.$$

Finalement nous obtenons l'intégrale complète

$$(7)\qquad r=ce^{k\arccos\frac{p_0x+q_0y}{r\sqrt{p_0^2+q_0^2}}}$$

avec les deux constantes arbitraires, c et $\frac{q_0}{p_0} = \text{tang}\,\mu$.

Les surfaces (7) représentent des surfaces de révolution dont l'axe est dans le plan des xy. Pour obtenir la méridienne, coupons par ce plan $z = 0$; nous obtenons

$$\rho = ce^{k(\varphi-\mu)},$$

équation qui représente une spirale logarithmique L, de pôle O et d'angle $V = \alpha$.

Le plan des xy étant quelconque, on voit qu'une intégrale complète est engendrée par une spirale logarithmique L prise dans un plan quelconque fixe π passant par l'origine et tournant autour de l'un de ses rayons vecteurs. Elle dépend de deux paramètres : la direction de l'axe dans le plan π et la constante c de laquelle dépend L.

Si l'on choisit pour axe la droite OΔ, donnée dans la première partie (I) : 1° on voit que les surfaces S' sont des solutions particulières de l'équation F; ce sont des intégrales complètes.

2° Pour obtenir l'intégrale générale, il suffit de prendre l'enveloppe des intégrales complètes déterminées par l'équation (7).

Les surfaces Σ sont engendrées par les courbes du complexe des caractéristiques associées suivant une certaine loi. Ces courbes ont pour équation

$$(8)\quad \begin{cases} v = r - ce^{k \arccos \frac{x\cos\mu + y\sin\mu}{r}} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial c} + b\,\dfrac{\partial v}{\partial \mu} = 0. \end{cases}$$

Elles dépendent des paramètres c, b et μ.

La deuxième équation (8) s'écrit

$$-1 + bk\,\frac{x\sin\mu - y\cos\mu}{\sqrt{r^2 - (x\cos\mu + y\sin\mu)^2}} = 0,$$

ou bien

$$(x \sin \mu - y \cos \mu)^2 + z^2 = b^2 k^2 (x \sin \mu - y \cos \mu)^2,$$

$$(9) \qquad x \sin \mu - y \cos \mu = \gamma z, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{b^2 k^2 - 1}}.$$

Cette dernière équation (9) est l'équation d'un plan qui contient la courbe de contact de la surface (7) avec son enveloppe. Il passe par l'axe de cette surface de révolution $c = 0$; donc les caractéristiques sont les méridiennes des intégrales complètes.

Ce sont des logarithmiques L tracées dans des plans passant par l'origine; elles dépendent bien de trois paramètres : la direction de leur plan π et l'orientation dans ce plan fixée par la constante c.

Si l'on suppose c donné, le plan (9) enveloppe un cône de révolution. La surface Σ correspondante est engendrée par une logarithmique déterminée dont le plan π roule sur un cône fixe. Il est clair que la génératrice est ligne de courbure et que les trajectoires de ses points forment l'autre système de lignes de courbure.

Si l'on prend $c = \text{fonct}(\mu)$, le plan (9) enveloppe un cône quelconque Γ. Une surface Σ quelconque sera engendrée par une caractéristique choisie L_0, dont le plan π roule sur le cône Γ pendant qu'elle-même subit une rotation autour de O dans son plan. La caractéristique reste ligne de courbure pour la surface Σ; le deuxième système des lignes de courbure est formé par leurs trajectoires orthogonales : ce sont des courbes sphériques.

3° La surface Σ est l'enveloppe d'une famille d'intégrales complètes ayant leurs axes dans le plan des xy. Or on peut remplacer une de ces surfaces intégrales par une nouvelle intégrale complète ayant son axe dans

le plan tangent au cône Γ mené par l'axe de la première.

De sorte que Σ peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe d'intégrales complètes.

En particulier, si l'on prend la famille d'enveloppées dont les axes décrivent le cône Γ, il est clair que l'enveloppe et l'enveloppée auront mêmes centres de courbure principaux.

Le cône Γ constitue l'une des nappes de la surface des centres; l'autre nappe est engendrée par la développée de la logarithmique génératrice; cette courbe est elle-même une logarithmique.

4° Une surface Σ déterminée est engendrée par une logarithmique L_0 qui coupe son rayon vecteur suivant l'angle α. Elle est donc telle que son plan tangent coupe le plan de sa caractéristique suivant une droite déterminée MT. Cette condition exprime que Σ satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire.

Pour l'obtenir, écrivons l'équation du plan de la caractéristique sous la forme (9), où γ est une fonction donnée de μ, $\gamma = f(\mu)$; MT a pour coefficients directeurs

$$qf + \cos\mu, \quad -pf + \sin\mu, \quad p\cos\mu + q\sin\mu$$

et nous avons en posant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\cos\alpha = \frac{(qf + \cos\mu)x + (-pf + \sin\mu)y + (p\cos\mu + q\sin\mu)z}{r\sqrt{(qf + \cos\mu)^2 + (pf - \sin\mu)^2 + (p\cos\mu + q\sin\mu)^2}}$$

qu'on peut écrire

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &[f(qx - py) + rf' + zP]^2 \\ &\quad = r^2\cos^2\alpha\,[f^2(p^2 + q^2) + 2fP' + 1 + P^2] \end{aligned}\right.$$

$$x\sin\mu - y\cos\mu = zf, \qquad P = p\cos\mu + q\sin\mu;$$

$$x\cos\mu + y\sin\mu = zf', \qquad P' = -p\sin\mu + q\cos\mu.$$

Si nous faisons dans cette équation $f = 0$, ce qui revient à supposer que le plan de la caractéristique passe par l'axe des z, nous devons retrouver l'équation (1).

On trouve en effet

$$x \cos\mu + y \sin\mu = \rho,$$

$$(\rho + 2\mathrm{P})^2 - \frac{k^2 r^2}{1 + k^2}(1 + \mathrm{P}^2) = 0,$$

équation du deuxième degré en P, d'où l'on déduit

$$(11) \quad \mathrm{P} = \frac{\rho \pm k z}{-z \pm k\rho}, \qquad x = \rho \cos\mu, \qquad y = \rho \sin\mu,$$

où les signes se correspondent. En prenant le signe + on a l'équation (1) qui correspond à l'angle α formé par le rayon vecteur OM avec la tangente dirigée MT; le signe — correspondrait à l'angle $\pi - \alpha$ et donnerait les mêmes caractéristiques L dont l'équation dans leur plan est $r = ce^{h\omega}$, $\mathrm{R} = \cot \mathrm{V}$.

Changer le signe de k revient à prendre la symétrique de L par rapport au rayon vecteur origine.

L'équation (10) nous donnera de même deux équations aux dérivées partielles linéaires; l'une d'elles correspondant à $k = \cot\alpha$ répondra à la question. Développons cette équation en remarquant qu'on a

$$qx - py = (\mathrm{P}f + \mathrm{P}'f')z$$
$$p^2 + q^2 = \mathrm{P}^2 + \mathrm{P}'^2;$$

il vient

$$z^2[f(f\mathrm{P} + f'\mathrm{P}') + \mathrm{P} + f']^2$$
$$= r^2\cos^2\alpha[f^2(\mathrm{P}^2 + \mathrm{P}'^2) + 2f\mathrm{P}' + 1 + \mathrm{P}^2],$$

qu'on peut écrire

$$(12) \quad \begin{cases} z^2[(1 - f^2)\mathrm{P} - f'(1 + f\mathrm{P}')]^2 \\ \quad = r^2\cos^2\alpha[(1 + f^2)\mathrm{P}^2 + (1 + f\mathrm{P}')^2]. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$1+f^2=m, \qquad 1+fP'=Q,$$

nous avons une équation homogène du deuxième degré en (P, Q).

Développant et résolvant par rapport à $\frac{P}{Q}$, on trouve

$$\frac{P}{Q}=\frac{-mf'z^2 \pm r\cos\alpha\sqrt{m^2z^2-mr^2\cos^2\alpha+mf'^2z^2}}{m^2z^2-m\cos^2\alpha\, r^2}.$$

En tenant compte de la relation

$$1+f^2+f'^2=\frac{r^2}{z^2},$$

on aura finalement l'équation linéaire cherchée

$$(13)\qquad m\frac{P}{Q}=\frac{-mf'z^2 \pm \sqrt{m}\cos\alpha\sin\alpha\, r^2}{mz^2-r^2\cos^2\alpha},$$

$$P=p\cos\mu+q\sin\mu,$$

$$Q=f(-p\sin\mu+q\cos\mu)+1,$$

dans laquelle μ doit être envisagé comme constant. Cette équation doit en effet admettre l'intégrale

$$x\sin\mu-y\cos\mu=f(\mu),$$

f fonction donnée et définissant le cône enveloppé par le plan de la caractéristique.

Cette équation (13) comporte le double signe, comme il fallait s'y attendre, et cela pour les mêmes raisons que l'équation (11). Pour lever l'ambiguïté, il suffira de choisir ce signe, de manière à retrouver l'équation (1) lorsqu'on fait dans (13)

$$f=0, \qquad m=1, \qquad f'=\frac{\rho}{z}.$$

On est ainsi amené, par raison de continuité, à prendre le signe —.

[I7a]

SUR UNE CONGRUENCE EXTRAITE DE LA CONGRUENCE BINOME, FACTEURS PREMIERS DE CERTAINS NOMBRES ;

Par M. G. FONTENÉ.

1. J'ai proposé, dans les *Nouvelles Annales*, la question suivante (2137) dont une solution a été donnée : *En désignant par p un nombre premier, par x et y deux nombres premiers entre eux, un nombre de la forme*

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} \quad \text{ou} \quad x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1}$$

a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, *à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse* $x - y = \text{mult.}\, p$, *dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois* (*en supposant* $p \neq 2$).

Dans une Note relative à cette question (1911, p. 70), M. E. Cahen, se plaçant dans l'hypothèse $y = 1$, indique qu'on peut obtenir un théorème plus général en remplaçant p par un nombre non premier n, et en substituant au polynome

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$$

le polynome $f^n(x)$ qui a pour racines les racines primitives de *l'équation* binome $x^n - 1 = 0$, et dont le premier coefficient est 1.

Je n'ai pas pu savoir si ces faits sont déjà connus. Quoi qu'il en soit, M. Cahen m'ayant indiqué la règle pour les diviseurs exceptionnels, j'en ai cherché (avec y

quelconque) une démonstration que je donne ici, parce qu'elle diffère sensiblement de celle à laquelle M. Cahen était arrivé.

2. Voici d'abord, avec les notations essentielles, l'indication de la marche que nous suivrons.

Soit $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ un nombre dont les facteurs premiers sont $p, q, r, \ldots$; nous extrairons la congruence

$$\text{(A)} \qquad x^n - y^n \equiv 0 \pmod{P},$$

P étant premier, y étant supposé connu, de la congruence

$$\text{(B)} \quad \frac{(x^n - y^n) \times \left(x^{\frac{n}{pq}} - y^{\frac{n}{pq}}\right) \ldots \times \left(x^{\frac{n}{pqrs}} - y^{\frac{n}{pqrs}}\right) \ldots}{\left(x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{p}}\right)\left(x^{\frac{n}{q}} - y^{\frac{n}{q}}\right) \ldots \times \left(x^{\frac{n}{pqr}} - y^{\frac{n}{pqr}}\right) \ldots} \equiv 0 \pmod{P},$$

le premier nombre étant le polynome qui a pour racines les racines primitives de *l'équation* binome $x^n - y^n = 0$, et dont le premier coefficient est 1. Cette congruence est de la forme

$$x^N + A x^{N-1} y + \ldots + A x y^{N-1} + y^N \equiv 0 \pmod{P},$$

N étant l'indicateur de n, $N = \varphi(n)$, et nous la désignerons d'une manière abrégée par l'écriture

$$f_n(x, y) \equiv 0 \pmod{P};$$

on suppose, bien entendu, y non congru à zéro suivant le module P.

Nous chercherons (II) les conditions de possibilité de la congruence (B), et cette étude nous donnera des renseignements sur les facteurs premiers d'un nombre de la forme $f_n(x, y)$, x et y étant deux nombres pre-

miers entre eux ; la recherche en question est liée à l'étude préliminaire des congruences binomes dont le module est un facteur premier de l'exposant (I).

3. Le polynome $F(x, y)$ étant homogène en x et y, si l'on considère la congruence

$$F(x, y) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} P),$$

y étant donné, non multiple de P, à chaque valeur de x correspond un nombre ξ tel qu'on ait

$$y \times \xi \equiv x \quad (\operatorname{mod} P),$$

puisque x n'est pas multiple de P ; c'est le lemme du théorème de Fermat. La congruence devient, après suppression du facteur y^n,

$$F(\xi, 1) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} P).$$

Cela permettrait de supposer $y = 1$. J'ai préféré laisser y quelconque, en vue de la symétrie.

I. — Sur les congruences binomes dont le module est un facteur premier de l'exposant.

Nous allons considérer les congruences

$$(\text{A}') \qquad x^n - y^n \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p),$$

$$(\text{B}') \qquad f_n(x, y) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p),$$

le module p étant un facteur premier de l'exposant n. (Nous mettons un accent pour indiquer ce fait.)

4. Théorème I. — *Le module p étant un diviseur de n, et p^α étant la plus haute puissance de p qui divise n, on a*

$$(1) \qquad x^n - y^n \equiv \left(x^{\frac{n}{p^\alpha}} - y^{\frac{n}{p^\alpha}}\right)^{p^\alpha} \quad (\operatorname{mod} p).$$

cette notation indiquant que le premier membre est identiquement congru au second, c'est-à-dire que les coefficients des termes semblables, dans les deux membres, sont congrus (mod p).

En effet, dans le développement de la puissance qui est au second membre, les coefficients des termes autres que les deux termes extrêmes contiennent le facteur p ; pour $p \neq 2$, les termes extrêmes sont x^n et $-y^n$, et, pour $p = 2$, le dernier terme est y^n ou $-y^n + 2y^n$.

[J'observe à ce propos que le théorème relatif au nombre des solutions d'une congruence à module premier compte chaque solution une seule fois, la congruence $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ ayant ses p solutions distinctes.]

5. Théorème II. — *Dans les mêmes conditions, on a*

$$f_n \equiv \left(f_{\frac{n}{p^\alpha}}\right)^{\varphi(p^\alpha)} \pmod{p}; \tag{2}$$

les deux membres sont du même degré, puisque l'on a

$$\varphi(n) = \varphi\left(\frac{n}{p^\alpha}\right) \times \varphi(p^\alpha).$$

Écrivons l'identité algébrique

$$\begin{aligned} f_n(x,y) \times \left(x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{p}}\right)\left(x^{\frac{n}{q}} - y^{\frac{n}{q}}\right) \cdots \left(x^{\frac{n}{pqr}} - y^{\frac{n}{pqr}}\right) \cdots \\ - (x^n - y^n)\left(x^{\frac{n}{pq}} - y^{\frac{n}{pq}}\right) \cdots \left(x^{\frac{n}{pqrs}} - y^{\frac{n}{pqrs}}\right) \cdots = 0. \end{aligned}$$

En posant

$$\frac{n}{p^\alpha} = h,$$

le théorème I donne pour le premier terme, relative-

ment au module p,

$$
\begin{array}{lll}
(\alpha) & x^{\frac{n}{p}} - \ldots \equiv (x^h - \ldots)^{p^{\alpha-1}}, & \\
(\beta) & x^{\frac{n}{q}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{q}} - \ldots\right)^{p^{\alpha}}, & \ldots. \\
(\gamma) & x^{\frac{n}{pqr}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{qr}} - \ldots\right)^{p^{\alpha-1}}, & \ldots, \\
(\delta) & x^{\frac{n}{qrs}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{qrs}} - \ldots\right)^{p^{\alpha}}, & \ldots, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}
$$

et, pour le second terme,

$$
\begin{array}{lll}
(\alpha') & x^{n} - y^{n} \equiv (x^h - y^h)^{p^{\alpha}}, & \ldots, \\
(\beta') & x^{\frac{n}{pq}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{q}} - \ldots\right)^{p^{\alpha-1}}, & \ldots. \\
(\gamma') & x^{\frac{n}{qr}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{qr}} - \ldots\right)^{p^{\alpha}}, & \ldots. \\
(\delta') & x^{\frac{n}{pqrs}} - \ldots \equiv \left(x^{\frac{h}{qrs}} - \ldots\right)^{p^{\alpha-1}}, & \ldots, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}
$$

Le premier membre de l'identité algébrique ci-dessus, quand on y remplace chaque binome par la puissance de binome qui lui est identiquement congrue (mod p), se transforme en un polynome identiquement congru à zéro (mod p). Ce polynome contient le facteur

$$\left[(x^h - y^h)\left(x^{\frac{h}{q}} - \ldots\right)\ldots\left(x^{\frac{h}{qr}} - \ldots\right)\ldots\right]^{p^{\alpha-1}},$$

dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité; en supprimant ce facteur, on a encore un polynome identiquement congru à zéro (mod p), comme le montre le mécanisme de la division. On a ainsi, en remplaçant $p^{\alpha-1}(p-1)$ par $\varphi(p^{\alpha})$,

$$
\begin{aligned}
f_n(x,y) \times \left[\left(x^{\frac{h}{q}} - \ldots\right)\ldots\left(x^{\frac{h}{qrs}} - \ldots\right)\ldots\right]^{\varphi(p^{\alpha})} & \\
- \left[(x^h - y^h)\left(x^{\frac{h}{qr}} - \ldots\right)\ldots\right]^{\varphi(p^{\alpha})} & \equiv 0, \pmod{p}.
\end{aligned}
$$

Le second terme étant divisible par le polynome qui multiplie f_n, on peut, comme ci-dessus, supprimer le facteur commun, et l'on obtient

$$f_n - (f_n)^{\varphi(p^\alpha)} \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p);$$

c'est ce qu'il fallait établir.

[Le théorème II permet de retrouver le théorème I. Le binome $x^n - y^n$ est le produit des facteurs f relatifs aux diviseurs de n. En désignant par λ, μ, ... les diviseurs de $q^\beta r^\gamma$ ..., les diviseurs de n sont

$$\begin{array}{lllll} \lambda p^\alpha, & \lambda p^{\alpha-1}, & \ldots, & \lambda p, & \lambda, \\ \mu p^\alpha, & \mu p^{\alpha-1}, & \ldots, & \mu p, & \mu, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \end{array}$$

en appliquant le théorème II, on voit que le binome $x^n - y^n$ est identiquement congru (mod p) au produit des polynomes

$$\begin{array}{lll} (f_\lambda)^{\varphi(p^\alpha)+\ldots+\varphi(p)+1} & \text{ou} & (f_\lambda)^{p^\alpha}, \\ (f_\mu)^{p^\alpha}, & \ldots; & \end{array}$$

or le produit des polynomes f_λ, f_μ, ... est le binome $x^{\frac{n}{p^\alpha}} - y^{\frac{n}{p^\alpha}}$; le binome $x^n - y^n$ est donc identiquement congru (mod p) au polynome

$$\left(x^{\frac{n}{p^\alpha}} - y^{\frac{n}{p^\alpha}}\right)^{p^\alpha};$$

c'est le théorème I.]

Si l'on prend en particulier $n = p^\alpha$, on a l'identité

$$x^{\frac{n}{p}(p-1)} + x^{\frac{n}{p}(p-2)} y^{\frac{n}{p}} + \ldots + y^{\frac{n}{p}(p-1)} \equiv (x-y)^{\frac{n}{p}(p-1)}$$
$$(\text{mod}\, p).$$

La vérification formelle se réduit à faire voir que le nombre

$$C_{p(p-1)}^{pk} - (-1)^k,$$

avec $P = p^{\alpha-1}$, est un multiple de p; j'ai proposé la question dans les *Nouvelles Annales*, et M. Bricard m'en a indiqué une solution qu'il doit publier.

6. Il résulte de ce qui précède que la congruence

$$(B') \qquad f_n(x, y) \equiv 0 \qquad (\bmod p),$$

le module étant un diviseur de n, a comme solutions les solutions de la congruence

$$(b') \qquad f_{\frac{n}{p^\alpha}}(x, y) \equiv 0 \qquad (\bmod p),$$

extraite de la congruence binome

$$(a') \qquad x^{p^{\frac{n}{p^\alpha}}} - y^{p^{\frac{n}{p^\alpha}}} \equiv 0 \qquad (\bmod p).$$

Nous reviendrons au n° **10** sur la question de savoir à quelle condition la congruence (b') est possible.

II. — Étude des congruences (B). Application.

7. Reprenons les congruences

$$(A) \qquad x^n - y^n \equiv 0 \qquad (\bmod P),$$

$$(B) \qquad f_n(x, y) \equiv 0 \qquad (\bmod P),$$

en vue de chercher les conditions de possibilité de la seconde. En désignant par δ le plus grand commun diviseur de n et $P-1$, la congruence (A) admet δ solutions; ce sont les solutions de la congruence

$$(\alpha) \qquad x^\delta - y^\delta \equiv 0 \qquad (\bmod P).$$

1° Si δ est n, c'est-à-dire si l'on a

$$P - 1 = kn, \qquad P = kn + 1,$$

la congruence (A) a n solutions ; la congruence (B) a alors N solutions.

2° Si δ n'est pas n, c'est-à-dire si P n'est pas de la forme $kn+1$, la congruence (B) ne peut avoir comme solutions que des solutions de la congruence (α); *en général, elle n'a pas alors de solution.*

8. Le diviseur δ n'étant pas n, la congruence (B) est comprise dans la congruence

$$\frac{x^n - y^n}{x^\delta - y^\delta} \equiv 0 \quad (\text{mod P}),$$

ou, en posant $n = \delta \times \theta$, $\theta \neq 1$, dans la congruence

$$x^{\delta(\theta-1)} + x^{\delta(\theta-2)}y^\delta + x^{\delta(\theta-3)}y^{2\delta} + \ldots + y^{\delta(\theta-1)} \equiv 0 \quad (\text{mod P}).$$

Si la congruence (B) admet comme solution une solution de la congruence (α), cette solution vérifie *a fortiori* la congruence qu'on vient d'écrire, et l'on doit avoir, le nombre des termes de cette congruence étant θ,

$$\theta \times y^{\delta(\theta-1)} \equiv 0 \quad (\text{mod P});$$

il faut donc que P soit un diviseur de θ, un diviseur de $\frac{n}{\delta}$. Les modules exceptionnels P, pour lesquels la congruence (B) est possible, et qui ne sont pas de la forme $kn+1$, ne peuvent donc être que des diviseurs premiers de n, soit p, q, r, ...

9. Prenons $P = p$. Le plus grand commun diviseur δ de n et $p-1$ ne peut renfermer le facteur p; c'est un diviseur de $\frac{n}{p^\alpha}$ ou $q^\beta r^\gamma \ldots$. La congruence

$$(\alpha') \qquad x^\delta - y^\delta \equiv 0 \quad (\text{mod } p)$$

est alors comprise dans la congruence

$$(\alpha') \qquad x^{\frac{n}{p^\alpha}} - y^{\frac{n}{p^\alpha}} \equiv 0 \pmod{p},$$

et il faut voir d'abord si la congruence

$$(\mathrm{B}') \qquad f_n(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$$

admet des solutions de la congruence (α'). On a vu au paragraphe I que cette congruence (B') a comme solutions les solutions de la congruence

$$(b') \qquad f_{\frac{n}{p^\alpha}}(x, y) \equiv 0 \pmod{p},$$

extraite de la congruence (α').

10. A quelle condition la congruence (b') aura-t-elle des solutions? C'est une question que nous avons laissée sans réponse à la fin du paragraphe I, et que nous pouvons maintenant résoudre. En appliquant à la congruence (b') ce qu'on a dit de la congruence (B), on voit que p ne peut être un module exceptionnel pour cette congruence (b') puisqu'il n'est pas un facteur premier de $\frac{n}{p^\alpha}$. La congruence (b') n'est donc possible que si $p - 1$ est divisible par $\frac{n}{p^\alpha}$ ou $q^\beta r^\gamma \ldots$,

$$p - 1 = k \frac{n}{p^\alpha} = k \times q^\beta r^\gamma \ldots,$$

ce qui exige d'abord que p soit le plus grand des facteurs premiers de n; cette congruence (b') a alors autant de solutions qu'il y a d'unités dans son degré. [Le plus grand commun diviseur de n et $p - 1$ étant $\delta = \frac{n}{p^\alpha}$, la congruence ($\alpha'$) ne diffère pas de la congruence (a').]

Le seul module exceptionnel pour la congruence

$f_n(x, y) \equiv 0$ *est donc le plus grand des facteurs premiers du nombre* n, *soit* p, *à condition encore que* $p - 1$ *soit divisible par* $\frac{n}{p^\alpha}$, c'est-à-dire que q^β, r^γ, ... soient des diviseurs de $p - 1$; et la congruence

$$f_n(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$$

a alors comme solutions [multiples d'ordre $\varphi(p^\alpha)$] les solutions de la congruence

$$f_{\frac{n}{p^\alpha}}(x, y) \equiv 0 \pmod{p},$$

solutions en nombre égal au degré de cette dernière congruence.

[Soit $y = 1$. On a

$$x^n - 1 \equiv \left(x^{\frac{n}{p^\alpha}} - 1\right)^{p^\alpha} \pmod{p}$$

et

$$f_n(x) \equiv \left(f_{\frac{n}{p^\alpha}}\right)^{\varphi(p^\alpha)} \pmod{p}.$$

En supposant que $p - 1$ est divisible par $\frac{n}{p^\alpha}$, les racines de la congruence

(B') $$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

racines qui sont en nombre égal au degré de cette congruence, ne sont pas racines primitives de la congruence

(A') $$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

laquelle n'a pas de racine primitive. Par exemple, si $n = p$, la congruence

$$x^{p-1} + \ldots + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ou

$$(x - 1)^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

admet la seule racine $x = 1$, qui n'est pas racine primitive de la congruence

$$x^p - 1 \equiv 0 \pmod p, \qquad \text{ou} \qquad (x-1)^p \equiv 0 \pmod p.$$

Mais on peut dire que les racines de la congruence (b'), pour $y = 1$, sont les racines primitives de la congruence (a'), le module p n'étant pas exceptionnel pour l'exposant $\frac{n}{p^\alpha}$ qui ne contient pas le facteur p.]

11. De là cette conséquence, que nous avions surtout en vue :

Théorème. — *Un nombre de la forme*

$$f_n(x, y),$$

x et y étant deux nombres premiers entre eux, a tous ses diviseurs premiers de la forme

$$P = kn + 1,$$

si ce n'est qu'il peut admettre comme facteur premier le plus grand des facteurs premiers de n, soit p. Il l'admet si $p - 1$ est divisible par $\frac{n}{p^\alpha}$ ou $q^\beta r^\gamma \ldots$,

$$p - 1 = k\frac{n}{p^\alpha} = k \times q^\beta r^\gamma \ldots,$$

c'est-à-dire si q^β, r^γ, ... sont des diviseurs de $p - 1$, et si l'on prend pour x et y deux nombres satisfaisant à la congruence

$$(b) \qquad f_{\frac{n}{p^\alpha}}(x, y) \equiv 0 \pmod p,$$

extraite de la congruence

$$(a) \qquad x^{\frac{n}{p^\alpha}} - y^{\frac{n}{p^\alpha}} \equiv 0 \pmod p;$$

avec l'hypothèse faite sur $p-1$, la congruence (b') donne, pour chaque valeur de y, autant de valeurs de x qu'il y a d'unité dans son degré [racines primitives de la congruence (a'), quand on suppose $y=1$].

En effet, si P est un diviseur premier du nombre considéré, lequel diviseur ne peut exister dans y puisqu'il devrait alors exister dans x, premier avec y, la congruence

$$f_n(x, y) \equiv 0 \pmod{P},$$

dans laquelle on donne à y la valeur qu'il a dans l'expression ci-dessus, tandis que l'on regarde x comme une inconnue, est une congruence possible, puisqu'elle est satisfaite lorsqu'on donne à x la valeur qu'il a dans l'expression.

12. *Il y aurait lieu de rechercher si le facteur exceptionnel p, lorsqu'il existe dans le nombre $f_n(x, y)$, peut y entrer plusieurs fois.*

Je montrerai plus loin que, avec $n=p^\alpha$, il n'en est rien.

13. Les diviseurs premiers de la forme $kn+1$ sont des nombres impairs ; par suite, *si n est impair, k* est pair, et l'on a

$$P = 2k'n + 1.$$

Ce fait est en relation avec le suivant. Le nombre n étant impair, on a

$$x^{2n} - y^{2n} = (x^n - y^n)[x^n - (-y)^n];$$

par suite, le polynome $f_{2n}(x, y)$ ne diffère pas du polynome $f_n(x, -y)$, ou encore le polynome $f_n(x, y)$ ne diffère pas du polynome $f_{2n}(x, -y)$. Dès lors, si P est un diviseur régulier pour les nombres de la forme

$f_n(x, y)$, c'est aussi un diviseur régulier pour les nombres de la forme $f_{2n}(x, y)$, et l'on a

$$P = k' 2 n + 1.$$

14. Le nombre premier 2 sera un diviseur exceptionnel si n est une puissance de 2, auquel cas les nombres que l'on considère sont des formes suivantes :

$$x^2 + y^2, \qquad x^4 + y^4, \qquad x^8 + y^8, \qquad \ldots.$$

x et y étant impairs. Ces nombres sont d'ailleurs simplement pairs (*voir* le n° **17**).

Ce cas excepté, le polynome $f_n(x, y)$ étant

$$x^N + A x^{N-1} y + \ldots + A x y^{N-1} + y^N,$$

le coefficient du terme en $x^{\frac{N}{2}} y^{\frac{N}{2}}$ est impair ; car, s'il était pair, en prenant x et y impairs, on aurait un nombre pair, ce qui n'est pas.

III. — Cas particulier.

15. La question qui se pose au n° **7**, en tenant compte des nos **8** et **9**, est celle de savoir si la congruence

$$(B') \qquad f_n(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$$

admet des solutions d'une congruence

$$(\alpha') \qquad x^\delta - y^\delta \equiv 0 \pmod{p},$$

δ étant un diviseur de $\frac{n}{p^\alpha}$. Je vais traiter cette question dans l'hypothèse $n = p^\alpha$ indépendamment des faits qui font l'objet du paragraphe I. J'en profiterai pour résoudre, dans ce cas particulier, la question posée au n° **12**.

16. Si d'abord n est un nombre premier p, les congruences (A) et (B) sont, pour reprendre tout le raisonnement,

$$\text{(A)} \qquad x^p - y^p \equiv 0 \pmod{P},$$
$$\text{(B)} \qquad x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1} \equiv 0 \pmod{P}.$$

Si $P - 1$ n'est pas multiple de p, comme la congruence (A) n'admet alors que la solution $x = y$, la congruence (B) ne peut admettre que cette solution, et elle l'admet pour $P = p$. (On ne se préoccupe pas, dans le raisonnement actuel, de l'ordre de multiplicité des solutions, qui est indifférent.) On obtient donc le théorème du n° 1, sauf à montrer que le nombre $\dfrac{x^p - y^p}{x - y}$, qui admet le diviseur p dans l'hypothèse $x - y = \text{mult.}\, p$ l'admet alors une seule fois. On a, en effet,

$$N = \frac{x^p - y^p}{x - y} = \frac{(y + h)^p - y^p}{h}$$
$$= py^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2}h + \ldots + pyh^{p-2} + h^{p-1},$$

tous les coefficients, à l'exception du dernier, étant divisibles par p ; comme on suppose h multiple de p, le second membre est divisible par p, et l'on a

$$N : p = y^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2 \times p} y^{p-2}h + \ldots + yh^{p-2} + h^{p-1} : p ;$$

en exceptant le cas $p = 2$, tous les termes du second membre, à partir du second, sont divisibles par h, donc par p, tandis que le premier terme y^{p-1} n'est pas divisible par p, et, par suite, le quotient $N : p$ n'admet plus le facteur p.

17. Soit maintenant $n = p^\alpha$. Les congruences (A)

et (B) sont

$$(A) \qquad x^n - y^n \equiv 0 \pmod{P},$$

$$(B) \qquad \frac{x^n - y^n}{x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{p}}} \equiv 0 \pmod{P},$$

ou, en posant

$$X = x^{\frac{n}{p}}, \qquad Y = y^{\frac{n}{p}},$$

$$[A] \qquad X^p - Y^p \equiv 0 \pmod{P},$$

$$[B] \qquad X^{p-1} + X^{p-2}Y + \ldots + Y^{p-1} \equiv 0 \pmod{P};$$

on aura, d'ailleurs, à tenir compte du fait que x et y doivent fournir des valeurs pour x et y, et il ne faudrait pas substituer à l'étude des congruences (A) et (B) l'étude pure et simple des congruences [A] et [B].

Si P n'est pas de la forme $kn + 1$, la congruence (B) ne peut admettre qu'une solution d'une congruence de la forme

$$(\alpha) \qquad x^{\delta} - y^{\delta} \equiv 0 \pmod{P},$$

δ étant une puissance de p autre que n; on verra, comme dans le cas général, que P doit être un diviseur de $\frac{n}{\delta}$, ce qui exige $P = p$.

[On peut d'ailleurs modifier un peu le raisonnement du cas général : δ étant un diviseur de $\frac{n}{p}$, la congruence écrite ci-dessus est comprise dans la congruence

$$x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{p}} \equiv 0 \quad \text{ou} \quad X - Y \equiv 0 \pmod{P};$$

la congruence (B) ou [B] est vérifiée par $X = Y$ si $P = p$ (cas précédent).]

Mais alors, $p - 1$ étant premier avec δ, la congruence

$$(\alpha') \qquad x^{\delta} - y^{\delta} \equiv 0 \pmod{p}$$

n'admet que la solution $x = y$. La congruence (B), en dehors de l'hypothèse $P = kn + 1$, n'est donc possible que dans l'hypothèse $P = p$, et n'admet alors que la solution $x = y$.

Donc : *En désignant par n une puissance d'un nombre premier p, par x et y deux nombres premiers entre eux, un nombre de la forme*

$$\frac{x^n - y^n}{x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{p}}} \quad \text{ou} \quad x^{\frac{n}{p}(p-1)} + x^{\frac{n}{p}(p-2)} y^{\frac{n}{p}} + \ldots + y^{\frac{n}{p}(p-1)},$$

ou encore un nombre de la forme

$$\frac{X^p - Y^p}{X - Y} \quad \text{ou} \quad X^{p-1} + X^{p-2} Y + \ldots + Y^{p-1},$$

$$X = x^{\frac{n}{p}}, \qquad Y = y^{\frac{n}{p}},$$

a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kn + 1$, *à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse* $x - y = \text{mult.}\, p$, *dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois (en supposant $n \neq 2$).*

Pour établir ce dernier point, rappelons que, X étant premier avec Y, $X - Y$ étant multiple de p, le nombre $\frac{X^p - Y^p}{X - Y}$ admet une seule fois le facteur premier p, en exceptant le cas $p = 2$. Voyons ce qui a lieu pour $p = 2$, X et Y étant x^2 et y^2, ou x^4 et y^4, ou x^8 et y^8, ..., avec x et y impairs. Le nombre considéré est ici $X + Y$, ou $x^{\frac{n}{2}} + y^{\frac{n}{2}}$, n étant une puissance de 2 autre que 2 lui-même, de sorte que $\frac{n}{2}$ est pair ; on a alors

$$X = (2h + 1)^{\frac{n}{2}} = (4h' + 1)^{\frac{n}{4}} = \text{mult.}\ 4 + 1\ ;$$

d'où

$$X + Y = (2h+1)^{\frac{n}{2}} + (2k+1)^{\frac{n}{2}} = \text{mult. } 4 + 2,$$

et ce nombre est simplement pair. Le cas $n = 2$ fait donc seul exception.

IV. — Autre cas particulier.

18. Soit encore

$$n = pq,$$

p et q étant deux nombres premiers distincts.

Avec $P = p$, δ étant un diviseur de $\frac{n}{p}$, ou q, on a $\delta = 1$ ou q, et la question est de savoir si la congruence

$$(B') \qquad \frac{(x^{pq} - y^{pq})(x - y)}{(x^q - y^q)(x^p - y^p)} \equiv 0 \pmod{p}$$

admet des solutions de l'une des deux congruences

$$(\alpha') \qquad x - y \equiv 0, \qquad x^q - y^q \equiv 0 \pmod{p}.$$

D'abord, l'hypothèse $x = y$ ne vérifie pas la congruence (B'); celle-ci peut s'écrire, en effet,

$$\frac{x^{(p-1)q} + x^{(p-2)q}y^q + \ldots + y^{(p-1)q}}{x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1}} \equiv 0 \pmod{p},$$

et, pour $x = y$, son premier membre se réduit à $y^{(p-1)(q-1)}$. Ce point réglé, reste l'hypothèse $\delta = q$; la congruence (B') est comprise dans la congruence

$$(B', P) \qquad \frac{x^{pq} - y^{pq}}{x^q - y^q} \equiv 0 \pmod{p},$$

laquelle se décompose en deux congruences seulement : la congruence (B'), d'une part, et la congruence

$$(P) \qquad \frac{x^p - y^p}{x - y} \equiv 0 \pmod{p},$$

d'autre part. Les solutions de la congruence

$$(Q) \qquad x^q - y^q \equiv 0 \pmod{p}$$

conviennent à la congruence (B', P); comme les solutions de cette congruence (Q), autres que la solution $x = y$, ne vérifient pas la congruence (P), elles vérifient la congruence (B').

Cette constatation est suffisante, sans qu'il soit nécessaire de démontrer que le premier membre de la congruence (B') est identiquement congru (mod p) au polynome

$$\left(\frac{x^q - y^q}{x - y}\right)^{p-1};$$

l'ordre de multiplicité des solutions de la congruence (B') est indifférent.

V. — Remarques.

19. Remarque I. — Reprenons la congruence

$$(\mathbf{A}) \qquad x^n - y^n \equiv 0 \pmod{P},$$

dans l'hypothèse

$$P = kn + 1;$$

elle a alors n solutions. Si G est une racine primitive du nombre premier P, de sorte qu'on ait

$$G^{kn} \equiv 1 \pmod{P},$$

l'exposant kn étant le plus petit qu'on puisse donner à G pour avoir le reste 1, on peut écrire [1]

$$y = G^{\beta},$$

[1] La congruence $x^n - Y \equiv 0 \pmod{P}$ a n solutions si Y est tel qu'on ait

$$Y^{\frac{P-1}{n}} \equiv 1 \pmod{P};$$

on doit avoir pour cela $Y = G^{n\beta} = (G^{\beta})^n$.

et les n valeurs de x sont

$$y = G^\beta, \qquad \alpha - \beta = \text{mult. de } k = 0, k, 2k, \ldots, (n-1)k;$$

on peut encore écrire

$$y = G^{k\mu+\rho}, \qquad x = G^{k\lambda+\rho}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

La congruence (B) a alors $\varphi(n)$ solutions, pour lesquelles la différence $\alpha - \beta$ est le produit de k par un nombre premier avec n et non supérieur à n, ou encore la différence $\lambda - \mu$ est un tel nombre.

Par exemple, si n est un nombre premier p, la congruence

$$x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1} \equiv 0 \pmod{P},$$

en supposant

$$P = kp + 1,$$

a $p - 1$ solutions : on peut écrire

$$y = G^\beta, \qquad x = G^\alpha,$$
$$\alpha - \beta = \text{mult. de } k \qquad (\alpha \neq \beta),$$

ou encore

$$y = G^{k\mu+\rho},$$
$$x = G^{k\lambda+\rho},$$
$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (\text{sauf } \mu).$$

20. Remarque II. — Dans un article dont l'idée première appartient à M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 217) j'ai étudié directement les nombres de la forme $x^2 + xy + y^2$. L'idée essentielle est que les deux congruences

$$\left.\begin{aligned} ab + a\lambda + \lambda^2 &\equiv 0 \\ bc + b\lambda + \lambda^2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

entraînent la congruence

$$ca + c\lambda + \lambda^2 \equiv 0,$$

en supposant λ premier avec n.

Cette remarque se généralise, et, pour cinq nombres a, b, c, d, e par exemple, les deux congruences

$$abcd + abc.\lambda + ab.\lambda^2 + a.\lambda^3 + \lambda^4 \equiv 0,$$
$$bcde + bcd.\lambda + bc.\lambda^2 + b.\lambda^3 + \lambda^4 \equiv 0$$

entraînent la congruence

$$cdea + cde.\lambda + cd.\lambda^2 + c.\lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

et, par suite, deux autres congruences analogues, λ étant premier avec le module ; il suffit, pour le voir, d'éliminer b entre les deux premières congruences ; on ordonne par rapport à b, on multiplie la seconde congruence par $a + \lambda$, la première par λ, on retranche, on divise par b qui n'est pas congru à zéro puisque λ ne l'est pas, et l'on a

$$[cde + \lambda(cd + c\lambda + \lambda^2)](a + \lambda) - a(cd + c\lambda + \lambda^2)\lambda \equiv 0;$$

les termes $a\lambda(cd + c\lambda + \lambda^2)$ disparaissent, et l'on obtient la nouvelle congruence. Mais ce point de départ ne mène ici à rien, les choses étant trop complexes.

[C2]

SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES CURVILIGNES;

Par M. A. BUHL.

---

1. Les intégrales curvilignes jouent, à coup sûr, en Mécanique et en Physique un rôle beaucoup plus important que partout ailleurs. Je laisse de côté les intégrales attachées à une fonction analytique $f(z)$, car c'est

un point sur lequel on s'arrête peu dans les cours qui s'adressent aux futurs techniciens. C'est pour ceux-ci qu'on devrait pouvoir présenter de nombreux calculs d'intégrales de ligne, uniquement dans le domaine réel, dès qu'on a donné la définition de ces intégrales.

Or c'est ce qu'on ne fait pas suffisamment. On dit aux élèves que les applications mécaniques et physiques seront nombreuses, mais on ne se sert guère, surtout dans l'espace à trois dimensions, d'intégrales curvilignes exprimant des êtres simples, des concepts géométriques élémentaires, des volumes par exemple.

Je pense que ce qui suit paraîtra combler, au moins partiellement, une telle lacune.

Je prends des volumes d'apparence classique qui pourraient tous s'exprimer individuellement par des intégrales doubles ; je montre que la connaissance de certains d'entre eux permet de déterminer les autres au moyen d'intégrales de ligne, toujours attachées à des contours très simples et parfaitement tangibles. Cela ne vaut-il pas mieux que de proposer d'intégrer une fonction imaginée au hasard le long d'un arc pris également au hasard ? Si un exercice de cette dernière catégorie peut apprendre à calculer, il ne montre guère l'intérêt du calcul. Mieux vaut avoir les deux choses.

Je me permets de renvoyer le lecteur intéressé par de telles considérations à un Mémoire, d'un degré un peu plus élevé, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1910). Ici je suis resté dans des exemples très élémentaires et je n'ai employé, parmi les formules du Mémoire en question, que celles que je pouvais rétablir facilement sans le secours de la formule de Stokes ni d'aucune autre formule nécessitant une démonstration spéciale.

J'estime que tout ce qui suit est proposable comme exercice, aux élèves d'un cours de Mathématiques générales. J'en ai fait l'expérience à la Faculté de Toulouse.

Et pour bien faire remarquer que je n'exagère en rien la simplicité de mes problèmes, qu'il me suffise de dire que toutes les intégrales curvilignes qu'on rencontrera dans ce qui suit se ramènent toujours, et d'une manière immédiate, à des intégrales définies où les éléments différentiels sont de la forme $u^m du$.

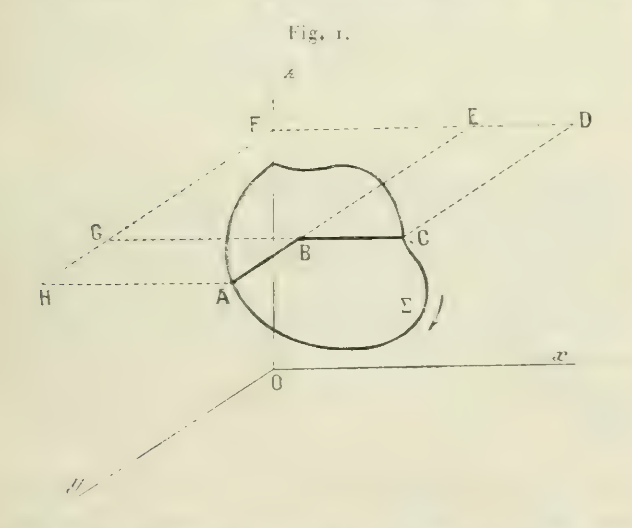
2. Soit, dans l'espace à trois dimensions, un contour fermé Σ, fixe en général, par lequel passe une cloison S. Des volumes peuvent avoir S pour facette commune et être cependant complètement différents par ailleurs. Tel serait le cas de cônes ayant S pour base gauche commune mais dont les sommets seraient distincts. Deux volumes d'une telle nature ont *évidemment* une *différence* qui ne dépend pas de la cloison S mais seulement de son contour Σ. Car déformer S, sans toucher à Σ, c'est ajouter un *même* volume, en forme d'onglet, aux deux volumes considérés. Cela ne change en rien leur différence.

Cette remarque, absolument intuitive, est susceptible d'applications immédiates, à la fois élémentaires et intéressantes.

3. *Volumes cylindriques principaux.* — Projetons tous les points de S et de Σ, parallèlement à l'axe Oz, sur le plan Oxy. On définit ainsi le volume classique, à surface latérale cylindrique. Je désignerai ce volume par U_z. Si l'on avait projeté, parallèlement à Ox ou à Oy, on aurait eu des volumes analogues que je désignerai par U_x et U_y. Les trois volumes ainsi définis,

considérés deux à deux, ont des différences qui, d'après le paragraphe précédent, ne doivent dépendre que du contour Σ. Évaluons ces différences et commençons par considérer $U_x - U_y$. Puisque sans altérer cette différence, nous pouvons déformer S, construisons cette cloison comme suit. Coupons Σ par un plan parallèle à Oxy, ce contour Σ étant, pour simplifier, supposé tel que ceci ne donne que deux points d'intersection A et C (*fig.* 1). Par C je mène une parallèle à Ox et

Fig. 1.



par A une parallèle à Oy, B étant l'intersection de ces parallèles, nous prendrons pour cloison S le lieu de la brisée ABC quand sa cote varie. Dans ces conditions, le volume U_x est engendré par le déplacement et la déformation d'un rectangle ABGH. De même U_y est engendré par BCDE.

Quand le point A parcourt Σ comme l'indique la flèche et qu'il monte de dz, le rectangle AHFE engendre un volume $xy\,dz$ dans lequel se trouve la

partie correspondant au rectangle BGFE, partie qui se retranchera à la descente. Donc finalement

$$U_x - U_y = \int_\Sigma xy\, dz.$$

Par des raisonnements analogues ou plus simplement par permutations circulaires on a le groupe des trois formules

$$(1)\qquad \begin{cases} U_x - U_y = \int_\Sigma xy\, dz, \\ U_y - U_z = \int_\Sigma yz\, dx, \\ U_z - U_x = \int_\Sigma zx\, dy. \end{cases}$$

Celles-ci ne sont pas distinctes. L'addition des trois donne, en effet, $0 = 0$, l'intégrale obtenue dans l'addition portant sur une différentielle exacte $d(xyz)$. Dans ce qui suit, ceci ne doit pas empêcher de calculer les trois intégrales curvilignes précédentes ; c'est seulement, ce calcul fait, qu'on cherchera à voir, à titre de vérification, si la somme de leurs valeurs est bien nulle.

4. *Première application des formules* (1). — Soit une sphère de rayon R ayant son centre à l'origine. Soient M un point de la sphère et P sa projection sur Oxy. Quel est le lieu de M si l'angle MOP doit toujours être égal à l'angle $POx = \theta$?

Ce lieu a évidemment pour équations, en coordonnées semi-polaires r et θ,

$$r = R\cos\theta, \qquad z = R\sin\theta.$$

La première équation représente la projection de la courbe sur Oxy ; c'est un cercle de diamètre OA,

A étant le point où la sphère coupe Ox. Je viens donc simplement de définir la courbe de Viviani.

La cloison S sera ici la portion de surface sphérique comprise entre l'arc de courbe obtenu en faisant varier θ de o à $\frac{\pi}{2}$ et le quart de circonférence TA, T étant le sommet de la courbe situé sur Oz. Le contour Σ de S est parcouru dans le sens direct, dans lequel on laisse à sa droite l'intérieur de S.

Calculons alors les seconds membres des formules (1). Des équations semi-polaires de la courbe, nous déduisons les équations cartésiennes

$$x = R\cos^2\theta, \qquad y = R\cos\theta\sin\theta, \qquad z = R\sin\theta.$$

De plus, on remarquera que l'intégration le long du quart de cercle TA donne un résultat nul car alors on a toujours $y = 0$.

Dans ces conditions, les formules (1) deviennent

$$U_x - U_y = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{5} R^3,$$

$$U_y - U_z = -2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^3\theta \, d\theta = -\frac{4}{15} R^3,$$

$$U_z - U_x = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{15} R^3,$$

ces intégrales se calculant d'une manière absolument immédiate en posant $u = \cos\theta$.

Remarquons que la somme des trois seconds membres est nulle conformément à la remarque terminant le n° 3.

Or on sait maintenant, par un calcul classique

maintes fois effectué, que

$$U_z = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}\right) R^3.$$

Alors on a immédiatement

$$U_y = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{22}{45}\right) R^3, \qquad U_x = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{13}{45}\right) R^3.$$

Un lecteur qui comparerait ces formules avec celles du Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (n° 3) remarquerait que les significations de U_x et U_y ont été échangées. Ceci tient simplement à ce que la figure n'est pas supposée construite de la même manière.

5. *Seconde application des formules* (1). — La définition donnée au paragraphe précédent pour la courbe de Viviani peut être généralisée en supposant que l'angle MOP est égal à n fois l'angle POx. On trouvera quelques mots d'historique à ce sujet dans le *Recueil d'Exercices* de F. Frenet, 5e édition (Problèmes 296, 303, 310).

Prenons simplement $n = 2$. La nouvelle courbe aura pour équations semi-polaires

$$r = R \cos 2\theta, \qquad z = R \sin 2\theta.$$

La première de ces équations représente la projection de la courbe sur Oxy; c'est la rosace à quatre feuilles engendrée par la projection de O sur un segment, de longueur constante $2R$, qui glisse sur deux droites rectangulaires passant par O et bissectrices des axes Oxy. Une des feuilles a Ox pour diamètre et la moitié de son périmètre est complètement parcourue, de A en O, quand θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. La cloison sphérique que je me propose de considérer se projette sur cette demi-

feuille. Calculons les seconds membres des formules (1).

On a d'abord pour la courbe les équations cartésiennes

$$x = R\cos 2\theta \cos\theta, \qquad y = R\cos 2\theta \sin\theta, \qquad z = R\sin 2\theta.$$

Là encore les intégrations le long du cercle TA donnent un résultat nul et les seconds membres (1) sont

$$2R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\theta \cos\theta \sin\theta \, d\theta,$$

$$-R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \sin 2\theta \sin\theta (\cos 2\theta \sin\theta + 2\sin 2\theta \cos\theta)\, d\theta,$$

$$R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \sin 2\theta \cos\theta (\cos 2\theta \cos\theta - 2\sin 2\theta \sin\theta)\, d\theta.$$

Si l'on pose $2\theta = \tau$, ces intégrales deviennent respectivement

$$\frac{1}{2}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\tau \sin\tau \, d\tau,$$

$$-\frac{1}{2}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau\left(\frac{1}{2}\cos\tau - \frac{3}{2}\cos^2\tau + 1\right)\sin\tau\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau\left(\frac{1}{2}\cos\tau + \frac{3}{2}\cos^2\tau - 1\right)\sin\tau\, d\tau.$$

Si maintenant on pose $\cos\tau = u$ elles deviennent

$$U_x - U_y = \frac{1}{2}R^3\int_0^1 u^3\, du = \frac{1}{8}R^3,$$

$$U_y - U_z = -\frac{1}{2}R^3\int_0^1 \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u^3 + u\right) du = -\frac{7}{48}R^3,$$

$$U_z - U_x = \frac{1}{2}R^3\int_0^1 \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u^3 - u\right) du = \frac{1}{48}R^3.$$

La somme de ces trois expressions est bien nulle.

Nous sommes donc en mesure maintenant de connaître U_x, U_y, U_z dès que nous connaîtrons une seule de ces trois quantités. Or, un calcul classique donne

$$U_z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{R\cos 2\theta} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}\right),$$

d'où, en vertu des formules précédentes,

$$U_x = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{19}{144}\right), \qquad U_y = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{37}{144}\right).$$

Entre les plans passant par Oz et d'azimut o et $\frac{\pi}{4}$ existe, au-dessus de Oxy, un demi-onglet sphérique dont le volume est précisément $\frac{\pi}{12}R^3$. L'excès du volume de ce demi-onglet sur les trois volumes U est rationnel. C'est un résultat bien classique quand il s'agit de U_z mais qui semble moins remarqué pour les deux autres volumes.

6. *Troisième application des formules* (1). — Considérons maintenant la courbe sphérique qui se projette sur Oxy suivant une lemniscate de Bernoulli ayant son point double en O et l'un de ses sommets au point A où la sphère coupe Ox.

Cette courbe sphérique aura pour équations semi-polaires

$$r^2 = R^2 \cos 2\theta, \qquad z = \sqrt{2}\, R \sin\theta,$$

ou pour équations cartésiennes

$$x = R\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \qquad y = R\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, \qquad z = \sqrt{2}\, R\sin\theta.$$

La cloison sphérique que nous considérons se projette sur la demi-boucle de lemniscate située dans l'angle Oxy. Calculons encore les volumes U_x, U_y, U_z

attachés à ladite cloison. Le contour d'intégration comprend toujours un arc TA donnant un résultat nul et les seconds membres de (1) sont

$$\sqrt{2}\,R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta,$$

$$-\sqrt{2}\,R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \sin^2\theta\, d\theta,$$

$$\sqrt{2}\,R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3\theta \cos\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Si l'on pose $\cos\theta = u$, ces intégrales deviennent

$$U_x - U_y = \sqrt{2}\,R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} u^2(2u^2 - 1)\, du = \frac{1+\sqrt{2}}{15} R^3,$$

$$U_y - U_z = \sqrt{2}\,R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (u^2 - 1)(4u^2 - 1)\, du = -\frac{11 - 4\sqrt{2}}{30} R^3,$$

$$U_z - U_x = \sqrt{2}\,R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} u^2(4u^2 - 3)\, du = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{10} R^3.$$

Leur somme est bien nulle.

Reste à calculer l'un des trois volumes U_x, U_y, U_z. Or un calcul facile donne

$$U_z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{R\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{4\sqrt{2} - 5}{9}\right);$$

d'où, en vertu des formules précédentes,

$$U_x = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{22\sqrt{2} - 23}{90}\right), \qquad U_y = R^3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{28\sqrt{2} - 17}{90}\right).$$

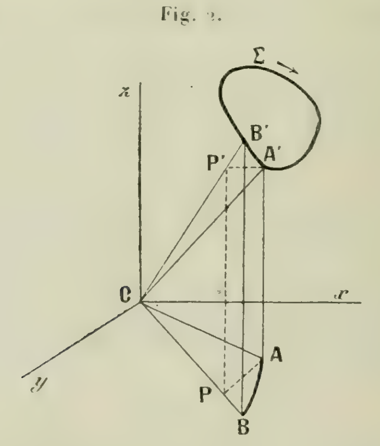
Ces volumes sont contenus dans le même demi-

onglet que celui considéré à la fin du paragraphe précédent. L'excès de ce demi-onglet sur chacun d'eux ne contient que $\sqrt{2}$ comme irrationalité numérique.

7. *Volumes cylindro-coniques.* — Soit toujours le contour Σ par lequel passe la cloison S. Nous continuerons à supposer, pour plus de simplicité, que l'axe Oz ne traverse pas S.

Si nous joignons tous les points de S et de Σ à l'origine nous formons un volume conique V_0 de sommet O. D'après le raisonnement général du paragraphe 2, la différence $U_z - V_0$ ne dépend que du contour Σ, ce qu'on peut voir directement sur la figure 2. Soit

Fig. 2.



A'B' un arc infiniment petit de Σ, arc se projetant en AB sur Oxy. On conçoit immédiatement que l'élément de volume OABB'A'O est celui de $U_z - V_0$. D'autre part, si AP est un arc de cercle de centre O, cet élément de volume peut être remplacé par OAPP'A'O. Ce dernier élément est une pyramide dont

la base APP'A a pour aire $zr\,d\theta$ et dont la hauteur est $OA = r$. Le volume de cette pyramide est donc $\frac{1}{3} zr^2 d\theta$ et l'on a finalement

$$(2) \qquad U_z - V_0 = \frac{1}{3} \int_\Sigma z r^2 \, d\theta.$$

8. *Volumes et aires sphériques.* — Dans mon Mémoire *Sur les applications de la formule de Stokes*, j'ai appliqué la formule (2) à divers objets. Ici je n'en retiens qu'un.

Si le contour Σ est sur une sphère de centre O et de rayon R et si la cloison S est la portion de surface sphérique contenue dans Σ, S ayant alors une aire σ, on a $R\sigma = 3V_0$ et la formule (2), devenant

$$(3) \qquad 3U_z - R\sigma = \int_\Sigma z r^2 \, d\theta.$$

donne le moyen, le volume U_z étant connu, d'avoir σ par une simple intégrale de ligne. Et réciproquement.

9. *Première application de la formule* (3). — Reprenons les données géométriques du paragraphe 4 et notamment la même cloison S dont nous chercherons l'aire σ. La formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) R^3 - R\sigma = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta,$$

d'où, sans peine,

$$\sigma = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Cette aire retranchée de celle du huitième de la sphère donne R^2 pour excès, ce qui est le théorème bien connu dû à Viviani.

10. *Seconde application de la formule* (3). — Reprenons les données géométriques du paragraphe 5. Cette fois la formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)R^3 - R\sigma = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos^2 2\theta \, d\theta,$$

car il y a toujours, comme au paragraphe précédent d'ailleurs, un quart de cercle TA le long duquel on a $\theta = 0$ et qui, par suite, donne une valeur nulle dans l'intégration. Pour $2\theta = \tau$ la formule précédente devient

$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)R^2 - \sigma = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\tau \cos^2\tau \, d\tau,$$

et l'intégrale définie qu'il faut calculer est la même que celle du paragraphe précédent. Elle a pour valeur $\frac{1}{3}$, d'où finalement

$$\sigma = R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).$$

Cette aire est comprise dans un demi-fuseau sphérique dont l'angle au sommet est $\frac{\pi}{4}$ et dont l'aire est $\frac{\pi}{4}R^2$. L'excès de l'aire du demi-fuseau sur l'aire σ est $\frac{1}{2}R^2$. Le résultat est encore bien connu, mais la méthode employée ici pour y parvenir paraît l'être beaucoup moins.

11. *Troisième application de la formule* (3). — Reprenons les données géométriques du paragraphe 6. Alors la formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right)R^3 - R\sigma = \sqrt{2}\,R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos 2\theta \, d\theta.$$

Posant $\cos\theta = u$, il vient

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right)R^2 - \sigma = \sqrt{2}\,R^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (2u^2-1)\,du,$$

et enfin

$$\sigma = R^2\left[\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2}-1)\right].$$

Cette aire, retranchée du demi-fuseau considéré au paragraphe précédent, donne pour excès $R^2(\sqrt{2}-1)$, ce qui, comme tous les volumes considérés au paragraphe 6, ne contient qu'une irrationalité quadratique.

Avant d'abandonner les cloisons sphériques remarquons qu'à propos des trois cloisons qui ont été considérées nous avons calculé les volumes U_x, U_y, U_z et l'aire σ.

Les méthodes classiques verraient là quatre intégrales doubles, ce qui a été remplacé ici par un seul calcul d'intégrale double et trois calculs d'intégrales simples étendues à un contour Σ. Le bénéfice paraît indéniable.

12. *Volumes conoïdaux.* — De tous les points de la cloison S et de son contour Σ abaissons des perpendiculaires sur une droite fixe que nous prendrons, par exemple, pour axe Oy.

Nous pouvons définir ainsi un volume conoïdal W_y. Considérons en même temps les volumes cylindriques U_x et U_z. Si nous coupons le tout par un plan normal à Oy, le solide conoïdal donne une section en forme de triangle et les solides cylindriques deux sections en forme de trapèze. De plus, on voit sans peine que le double de l'aire triangulaire égale la somme des aires trapézoïdales. Une telle égalité, multipliée par dy,

donne une égalité entre éléments de volume et l'on conclut par intégration

$$2W_y = U_x + U_z.$$

13. *Volumes bicylindriques et aires correspondantes.* — Dans mon Mémoire, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes*, j'ai étudié plusieurs conséquences de la formule précédente. Ici je n'en retiens qu'une. Supposons que la cloison S appartienne à un cylindre *circulaire* Γ de rayon R et d'axe Oy et que l'aire de cette cloison soit σ. Alors

$$2W_y = R\sigma,$$

et comme, d'autre part,

$$U_z - U_x = \int_\Sigma zx\,dy,$$

on a

$$2U_z - R\sigma = \int_\Sigma zx\,dy, \tag{4}$$

formule comparable à (3). Ce sont les volumes U_z que j'appelle *bicylindriques* pour rappeler qu'ils sont limités, vers le haut, par une cloison S qui appartient à un cylindre (circulaire) et, latéralement, par un cylindre dont la base dans Oxy peut être une courbe fermée quelconque. On voit que ces volumes U_z et l'aire σ correspondante sont liés par une simple intégrale de ligne.

14. *Application de la formule* (4). — Coupons le cylindre Γ par un cylindre absolument identique mais d'axe Oz. Le noyau commun aux deux solides nous donne, dans le trièdre $Oxyz$, un volume

$$U_z = \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}R^3.$$

La courbe d'intersection des deux cylindres est une ellipse d'équations

$$x = R \cos\theta, \qquad y = R \sin\theta, \qquad z = R \sin\theta,$$

si bien que la formule (4) donne immédiatement $\sigma = R^2$.

Dans le *Recueil d'Exercices* de F. Frenet on trouve des calculs de U_z et de σ au moyen d'intégrales doubles (5e édition, Problèmes 501 et 509).

15. *Contours tels que* $U_z = U_x = W_y$. — D'après la dernière des formules (1), on voit que ces contours Σ sont ceux qu'on peut tracer sur une surface

$$(5) \qquad zx = f(y),$$

la fonction f étant quelconque et le contour Σ étant simplement choisi de manière à éviter des difficultés singulières relatives à f.

Mais des applications bien simples et des plus élégantes s'obtiennent, sans qu'on ait à s'inquiéter de telles difficultés, en prenant, pour $f(y)$, un simple polynome.

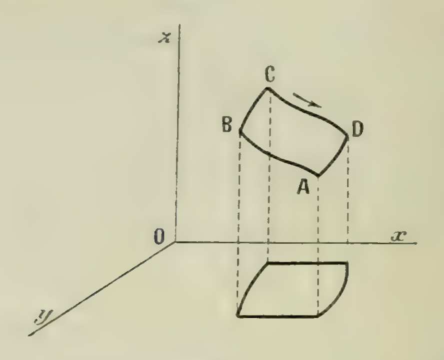
Dans mon Mémoire, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (n° 4), je suis déjà revenu sur les surfaces (5). Voici d'abord une première remarque non faite à l'endroit cité.

Supposons que l'on coupe une des surfaces (5) et le contour Σ y tracé par deux plans *parallèles à* Ozx. Sur la figure 3, AB et CD sont les fragments de courbe plane obtenus dans la surface (5) par les plans sécants. BC et DA sont les fragments du contour Σ compris entre ces plans.

Je dis que l'intégrale de $zx\,dy$ est nulle non seulement le long de Σ mais aussi le long du contour mixte ABCDA. En effet, $f(y)\,dy$ prend des valeurs égales

et de signes contraires de B en C, puis de D en A; ces deux portions du contour d'intégration donnent donc

Fig. 3.



au total un résultat nul. Et quant aux portions AB et CD elles donnent, chacune pour leur compte, un résultat nul parce que, le long de ces portions, y est constant et, par suite, dy nul.

D'après la formule qui termine le paragraphe 12, on voit que les cloisons, pour lesquelles on a $U_z = U_x$, donnent aussi $W_y = U_z$.

Si le contour Σ se trouve sur le cylindre circulaire Γ défini au paragraphe 13, l'égalité $W_y = U_z$ s'écrit aussi $R\sigma = 2U_z$.

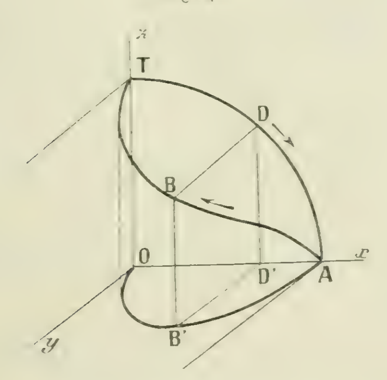
16. *Contours cylindriques pour lesquels* $R\sigma = 2U_z$. — Cherchons un exemple de tels contours, ce que l'on peut présenter comme une seconde application de la formule (4).

Pour rendre nul le second membre de (4), nous avons le choix entre toutes les surfaces (5). Je prendrai simplement $f(y) = ky$; d'où, pour Σ, la courbe

$$x^2 + z^2 = R^2, \qquad zx = ky$$

intersection du cylindre Γ avec un paraboloïde hyperbolique qui admet pour génératrices Oz et la droite, non tracée sur la figure 4, qui passe par A, parallèlement à Oyz, avec une pente $\frac{k}{R}$; toutes les génératrices de l'autre système étant parallèles à Oxy, on se représente facilement la quadrique en question.

Fig. 4.



Mais il est peut être encore plus simple d'éliminer z entre les équations précédentes et d'observer que l'intersection étudiée a, sur Oxy, une projection d'équation

$$k^2 y^2 = x^2 (R^2 - x^2).$$

C'est là un huit [1] dont le point double est en O et

---

[1] Cette courbe se rencontre dans de nombreuses projections d'intersections de quadriques, ce qui a été particulièrement mis en lumière dans les excellents *Exercices de Géométrie descriptive* de F. G.-M. (4e édition, [illegible], p. [illegible], [illegible], [illegible], [illegible] et *passim*). C'est évidemment la courbe $R^2 y^2 = x^2 (R^2 - x^2)$, dont les ordonnées sont affectées d'un facteur constant et, quant à cette dernière, on paraît la désigner de plus en plus sous le nom de *lemniscate de Geronó* proposé par F. G.-M. (*loc. cit.*, p. 399). Cette dénomi-

dont la figure 4 représente le quart en AB′O. Le contour Σ sera ABTDA. On voit que dans ce contour on fait intervenir non pas toute l'intersection du paraboloïde et du cylindre mais seulement l'arc ABT qu'on ferme par le quart de cercle TDA, ce qui est permis d'après la remarque faite au paragraphe précédent.

On a directement

$$U_z = \int_0^R \overline{B'D'} . \overline{DD'}\, dx = \int_0^R \frac{x}{k}(R^2 - x^2)\, dx = \frac{R^4}{4k},$$

ce qui est aussi W_y. Alors

$$\sigma = \frac{R^3}{2k}.$$

17. *Contours tels que* $U_z = V_0$. — La formule (2) qui peut s'écrire

$$U_z - V_0 = \frac{1}{3}\int_\Sigma z(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{3}\int_\Sigma zx^2\, d\left(\frac{y}{x}\right),$$

nous montre immédiatement que de tels contours sont situés sur les surfaces

$$zx^2 = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

parmi lesquelles on peut particulièrement remarquer

$$zx^2 = k^3, \qquad xyz = k^3, \qquad z(x^2 + y^2) = k^3.$$

Mais on peut placer tout de suite ici une remarque

---

nation est reproduite en effet dans les *Notes de bibliographie des courbes géométriques* de M. H. Brocard, ouvrage qui semble avoir été le prototype de tous les ouvrages encyclopédiques publiés ensuite sur les courbes remarquables (*Voir*, par exemple, G. Loria, *Ebene Kurven*, p. 174). On peut la retrouver également sans sortir des *Nouvelles Annales* (Philbert du Plessis, 1904, p. 261). Je l'emploie couramment dans mon cours de Mathématiques générales de Faculté des Sciences de Toulouse.

analogue à celle déjà faite au paragraphe 15. Un contour Σ étant tracé sur une surface (6), on pourra en déduire une sorte de quadrilatère limitant une cloison pour laquelle on aura aussi $U_z = V_0$. Nous obtiendrons ce quadrilatère ABCD en coupant Σ par un plan passant par Oz et d'argument fixe θ_1 ce qui donnera deux points d'intersection A et B, puis par un autre plan analogue d'argument $\theta_2 < \theta_1$, ce qui donnera deux autres points C et D. On parcourt ABCDA dans le sens direct. De B en C, puis de D en A, les éléments en $d\theta$ se détruisent ; de A en B ou de C en D, θ est constant et, par suite, $d\theta$ nul.

Quand de tels contours sont tracés sur la sphère de centre O et de rayon R et qu'ils enferment une aire sphérique σ on a, comme on l'a déjà remarqué au paragraphe 8,

$$3V_0 = R\sigma:$$

d'où

$$3U_z = R\sigma,$$

ce qu'on aurait pu écrire immédiatement d'après (3).

18. *Remarque générale.* — Considérons l'intégrale curviligne

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{7}$$

étendue à un contour fermé Σ et cela sans faire aucune hypothèse sur le problème qui en entraîne la considération.

L'expression différentielle $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ peut toujours être ramenée à la forme

$$d\alpha + \beta\,d\gamma,$$

α, β, γ étant trois fonctions de x, y, z à déterminer.

(*Voir*, par exemple, P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, 2ᵉ édition, t. III, p. 453. — G. Darboux, *Comptes rendus*, 15 et 22 novembre 1909.)

Dans ces conditions l'intégrale précédente prend la forme

$$\int \beta \, d\gamma, \tag{8}$$

car l'intégrale de $d\alpha$ est nulle le long d'un contour fermé, sauf singularités que nous nous arrangerons à laisser de côté par un choix convenable de Σ.

Construisons maintenant des surfaces $\beta = f(\gamma)$, f étant une fonction arbitraire.

En général, on pourra toujours tracer, sur ces surfaces, une infinité de contours non singuliers pour lesquels l'intégrale (8) *et, par suite, l'intégrale* (7) *seront nulles.* L'assertion est évidente puisqu'il n'y aura à considérer, en dernière analyse, que l'intégrale de $f(\gamma)\,d\gamma$, c'est-à-dire d'une différentielle exacte, le long d'un contour fermé.

De plus, en partant d'un de ces contours Σ, on pourra toujours en déduire des contours de forme quadrilatérale possédant la même propriété. Pour cela on coupera ce contour Σ et la surface $\beta = f(\gamma)$ qui le porte, par les deux surfaces

$$\gamma = C_1, \qquad \gamma = C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes différentes. On obtiendra ainsi un quadrilatère ABCDA, où AB et CD sont les intersections de $\beta = f(\gamma)$ par les deux surfaces précédentes cependant que BC et DA sont des arcs de Σ compris entre ces mêmes surfaces. Le long de AB et de CD on aura $d\gamma = 0$; le long de BC, les éléments $f(\gamma)\,d\gamma$ auront des valeurs correspondant à la variation

de γ de C_1 à C_2 tandis que sur DA on retrouvera les mêmes éléments alors que γ varie de C_2 à C_1.

On voit que ces considérations générales donnent, comme cas particuliers, les remarques faites aux paragraphes 15 et 17.

[R3a]

SUR LES COORDONNÉES LINÉAIRES GÉNÉRALES;

Par M. M. MICHOUX,
Élève de Mathématiques spéciales à Clermont-Ferrand.

---

1. Nous nous proposons de définir ici un système général de coordonnées pour les vecteurs et systèmes de vecteurs. Ces coordonnées, qu'on pourrait appeler *coordonnées linéaires générales*, offrent la plus grande analogie avec les coordonnées pentasphériques générales de feuillets sphériques dont M. J. Haag a exposé la théorie dans une Note du numéro de février 1911 des *Nouvelles Annales*. Nous allons reprendre systématiquement les différents résultats contenus dans cette Note et les étendre au cas qui nous intéresse.

2. Nous rappellerons d'abord rapidement quelques résultats et quelques définitions bien connus.

Étant donnés deux vecteurs $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_2)$ par leurs six coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$, $(X_2, Y_2, \ldots, N_2)$ relatives à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, leur *moment relatif*, que nous désignerons par la notation θ_{12}, et qui peut être défini comme étant égal à six fois

le volume algébrique du tétraèdre construit sur les deux vecteurs, est donné par la formule

$$\theta_{12} = L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1.$$

Plus généralement étant donnés deux systèmes de vecteurs (S) et (S′) par leurs coordonnées (X, Y, Z, L, M, N) et $(X', Y', \ldots, N')$ leur moment relatif a pour expression

$$(1) \qquad \theta(S, S') = LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z$$

et représente six fois la somme algébrique des volumes de tous les tétraèdres obtenus en associant successivement tous les vecteurs du système (S) avec tous les vecteurs du système (S′).

Dans le cas où (S′) se confond avec (S), l'expression précédente devient

$$(2) \qquad \theta(S) = 2LX + 2MY + 2NZ$$

et prend le nom d'*automoment* du système (S). Les systèmes d'automoment nul sont ceux qui sont réductibles à un vecteur unique.

3. Ceci rappelé, choisissons six systèmes fixes (S_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ de coordonnées $(X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i)$ et linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_6 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & N_6 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Il est clair qu'à tout système (S) (X, Y, Z, L, M, N) on peut faire correspondre six nombres $x_1, x_2, \ldots, x_6$,

non tous nuls, par les équations linéaires

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{l}
X = \sum_{i=1}^{6} x_i X_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N = \sum_{i=1}^{6} x_i N_i.
\end{array}
\right.
$$

et réciproquement.

Les systèmes (S_i) seront appelés les *systèmes fondamentaux* et les nombres (x_i) seront les *coordonnées du système* (S) ou (x) par rapport à ces systèmes fondamentaux.

On peut les interpréter de la manière suivante : *ce sont les nombres par lesquels il faut multiplier tous les vecteurs de chaque système fondamental pour que l'ensemble des six nouveaux systèmes obtenus soit équivalent au système* (S).

Il est clair que le système (S_i) a toutes ses coordonnées nulles, sauf la coordonnée (x_i) qui est égale à l'unité.

L'automoment du système (S) devient la transformée de l'expression (2) par la substitution linéaire (3), c'est-à-dire une forme quadratique à six variables (x_i). Nous la désignerons par $\Omega(x)$, et nous l'appellerons la *forme quadratique fondamentale*. L'équation

$$
(4)\qquad \Omega(x) = 0
$$

caractérise les systèmes d'automoment nul, c'est-à-dire équivalents à un vecteur unique.

Si l'on se reporte à la formule (1) en se rappelant les propriétés d'invariance de la forme polaire, on voit

que le moment relatif de deux systèmes (S), (S′) est

$$(5) \qquad \theta(S, S') = \Omega(x \mid x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} x'_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}.$$

Cela permet une interprétation très simple des coefficients de $\Omega(x)$. Si l'on pose

$$\Omega(x) = \sum\sum A_{ij} x_i x_j,$$

on voit immédiatement que le coefficient A_{ij} est égal au moment relatif des systèmes fondamentaux (S_i) et (S_j).

4. Nous appellerons *coordonnées adjointes du système* (S) les six nombres (y_i) définis par

$$y_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}.$$

Au moyen de ces coordonnées, la forme fondamentale $\Omega(x)$ se transforme en son adjointe $\omega(y)$.

L'automoment du système peut s'écrire

$$(6) \qquad \theta(S) = \Omega(x) = \omega(y) = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i.$$

De même le moment relatif de deux systèmes (S), (S′) s'écrit

$$(7) \quad \theta(S, S') = \Omega(x \mid x') = \omega(y \mid y') = \sum_{i=1}^{6} x'_i y_i = \sum_{i=1}^{6} x_i y'_i.$$

La définition des coordonnées adjointes nous conduit naturellement à celles des *systèmes fondamentaux adjoints* (σ_i) ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Le système (σ_i) sera défini par les conditions suivantes :

toutes ses coordonnées (y) sont nulles, sauf la coordonnée (y_i) qui est égale à l'unité.

Il résulte des formules (6) et (7) que le système (σ_i) sera complètement défini par les conditions suivantes : *Ses cinq moments relatifs par rapport aux systèmes fondamentaux* (S_j) $(j \neq i)$ *sont nuls, et son moment relatif par rapport à* (S_i) *est égal à l'unité.*

Nous pouvons donner maintenant une interprétation très simple des coordonnées (x_i) et (y_i) du système (S) en appliquant les formules (7). On trouve en effet

$$\theta(S, \sigma_i) = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i' = x_i,$$

$$\theta(S, S_i) = \sum_{i=1}^{6} x_i' y_i = y_i.$$

Les coordonnées (x_i) et (y_i) sont donc respectivement égales aux moments relatifs du système (S) par rapport aux systèmes (σ_i) et (S_i).

Il y a donc réciprocité complète entre les systèmes (σ_i) et (S_i). En posant

$$\omega(y) = \sum\sum a_{ij} y_i y_j,$$

on montrerait comme précédemment que le coefficient a_{ij} est égal au moment relatif des systèmes (σ_i) et (σ_j).

5. Les considérations qui précèdent nous permettent de retrouver immédiatement, avec une interprétation très simple, la généralisation bien connue des coordonnées plückériennes de droites [1]. Étant donnée une droite (D), si nous prenons sur (D) un vecteur quelconque, les coordonnées de ce vecteur varient

[1] *Voir* G. Kœnigs, *Géométrie réglée*, Chap. I.

proportionnellement quand on change sa grandeur. On peut donc prendre pour coordonnées homogènes de (D) six nombres x_i proportionnels aux moments relatifs de (D) par rapport aux systèmes (σ_i) et vérifiant la relation (4)

$$(4) \qquad \Omega(x) = 0,$$

ou bien six nombres y_i proportionnels aux moments relatifs de (D) par rapport aux systèmes (S_i) et vérifiant la relation

$$(8) \qquad \omega(y) = 0.$$

Des formules (7), (4), (8) résulte la condition bien connue de rencontre des deux droites (x) et (x')

$$(9) \qquad \Omega(x \mid x') = \Omega(x - x') = 0$$

ou

$$\omega(y - y') = 0.$$

6. Cherchons un ensemble de systèmes fondamentaux (S_i), dans lequel le système adjoint (σ_i) coïncide avec (S_i).

Pour cela il faut et il suffit que les moments relatifs de (S_i) par rapport aux cinq autres systèmes fondamentaux soient nuls [1], et que son automoment soit égal à l'unité.

Les formes quadratiques $\Omega(x)$ et $\omega(y)$ se réduisent donc à

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2, \qquad \omega(y) = \sum_{i=1}^{6} y_i^2;$$

et l'on a

$$y_i = x_i.$$

---

[1] On peut dire, en employant une locution empruntée à la théorie des complexes linéaires, que *les systèmes fondamentaux sont deux à deux orthogonaux*.

Par suite, il n'y a plus lieu de distinguer les coordonnées adjointes des coordonnées fondamentales. Dans le cas d'une droite on retrouve les coordonnées de Klein.

7. Un système également fort important est celui où l'on prend pour systèmes fondamentaux (S_i) les six vecteurs formés par les arêtes d'un tétraèdre. Prenons par exemple pour systèmes (S_1), (S_2), ..., (S_6) les vecteurs

$$(A_1A_2),\quad (A_1A_3),\quad (A_1A_4),\quad (A_3A_4),\quad (A_4A_2),\quad (A_2A_3).$$

Cherchons la forme quadratique fondamentale. D'après la signification donnée plus haut des coefficients de cette forme, nous pouvons l'écrire immédiatement. On a, en supposant que le volume $A_1A_2A_3A_4$ soit égal à $\frac{1}{6}$,

$$\Omega(x) = 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6).$$

Cherchons les systèmes adjoints. Le système (σ_1) par exemple a un moment relatif nul par rapport aux systèmes (S_i) $(i \neq 1)$, et égal à l'unité par rapport au système S_1. De même pour les autres. La forme adjointe est donc

$$\omega(y) = 2(y_4y_1 + y_5y_2 + y_6y_3).$$

Les coordonnées adjointes (y_i) coïncident dans leur ensemble avec les coordonnées (x_i), mais les coordonnées égales n'ont pas même indice.

Les nombres x_i ou y_i sont appelés dans ce cas les *coordonnées tétraédriques* du système de vecteurs. Dans le cas d'un vecteur unique on retrouve les coordonnées de M. Kœnigs avec leur interprétation géométrique [1].

---

[1] *Voir* G. Kœnigs, *Leçons de Cinématique*.

Voici une application simple : cherchons les équations des surfaces du deuxième degré (il y en a une simple infinité) passant par le quadrilatère gauche $A_1 A_2 A_4 A_3 A_1$. Une génératrice variable rencontrant $A_1 A_2$ et $A_4 A_3$ appartient aux deux complexes spéciaux d'équations

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0;$$

ses autres coordonnées vérifiant la relation (4), on a

$$x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0.$$

Une génératrice fixe du second système a des coordonnées (x'_i) satisfaisant de même aux équations

$$x'_2 = 0, \qquad x'_5 = 0, \qquad x'_1 x'_4 + x'_3 x'_6 = 0.$$

La condition de rencontre de ces deux droites se réduit d'après (9) à

$$x'_6 x_3 + x'_3 x_6 = 0.$$

Si donc m désigne une constante quelconque, les équations

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_3 = m x_6, \qquad x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$$

définissent une quelconque des demi-quadriques qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$, et démontrent la propriété suivante :

Le rapport des volumes des tétraèdres construits, d'une part, sur un vecteur quelconque d'une génératrice variable d'un hyperboloïde et, d'autre part, sur deux vecteurs fixes, portés par deux génératrices du même système, est indépendant de la génératrice variable.

[O5j]

SUR LA THÉORIE DES LIGNES ASYMPTOTIQUES;

PAR M. HENRI PERROTIN.

Il nous a paru intéressant de résoudre la question suivante : « Choisir trois fonctions x, y, z de deux variables u, v, telles que, si on les considère comme les coordonnées d'un point mobile sur une surface, u et v soient les paramètres des lignes asymptotiques de cette surface » ([1]).

1. Soient x, y, z les coordonnées d'un point, mobile sur une surface, exprimées en fonction des paramètres u, v de ses lignes asymptotiques. Par ailleurs, soient P, Q, R les paramètres directeurs de la normale exprimés en fonction des mêmes variables; l'équation différentielle des lignes asymptotiques,

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = 0$$

doit se réduire à $du\,dv = 0$; on doit donc avoir

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

et, d'après la définition des fonctions P, Q, R,

$$(2)\quad \begin{cases} P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial y}{\partial u} + R\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2ex] P\dfrac{\partial x}{\partial v} + Q\dfrac{\partial y}{\partial v} + R\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

([1]) Le plan général de ce travail nous a été aimablement indiqué par M. V. Jamet, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

D'où se déduisent les relations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \lambda\left(Q\frac{\partial R}{\partial u} - R\frac{\partial Q}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \lambda\left(R\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial R}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \lambda\left(P\frac{\partial Q}{\partial u} - Q\frac{\partial P}{\partial u}\right);\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \mu\left(Q\frac{\partial R}{\partial v} - R\frac{\partial Q}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \mu\left(R\frac{\partial P}{\partial v} - P\frac{\partial R}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \mu\left(P\frac{\partial Q}{\partial v} - Q\frac{\partial P}{\partial v}\right),\end{aligned}\right.$$

λ et μ représentant des fonctions de u et de v. Il est aisé de voir que $\lambda = -\mu$.

En vertu des relations (3), on trouve en effet

$$\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = \lambda\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\\ \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix},$$

et similairement en s'appuyant sur les équations (4)

$$\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mu\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\\ \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Les deux déterminants ci-dessus sont égaux et de signes contraires ; de plus, les premiers membres des deux dernières équations sont égaux, ce dont on s'aperçoit en différentiant la première des équations (2) par rapport à v, la deuxième par rapport à u.

2. Soient encore

$$p = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{P},$$
$$q = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Q},$$
$$r = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{R},$$

on pourra remplacer les équations (3) et (4) par les suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = q\,\dfrac{\partial r}{\partial u} - r\,\dfrac{\partial q}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} = r\,\dfrac{\partial p}{\partial u} - p\,\dfrac{\partial r}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} = p\,\dfrac{\partial q}{\partial u} - q\,\dfrac{\partial p}{\partial u}; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} = r\,\dfrac{\partial q}{\partial v} - q\,\dfrac{\partial r}{\partial v}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v} = p\,\dfrac{\partial r}{\partial v} - r\,\dfrac{\partial p}{\partial v}, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v} = q\,\dfrac{\partial p}{\partial v} - p\,\dfrac{\partial q}{\partial v}. \end{cases}$$

En comparant la première des équations (5) avec la première des équations (6) et tenant compte de la condition

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u},$$

on trouve, après simplification,

$$(7)\qquad q\,\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} - r\,\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Des quatre autres équations appartenant aux groupes (5) et (6), on déduira deux autres relations analogues, entraînant, avec la précédente, les proportions ci-dessous :

$$\frac{1}{p}\,\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}.$$

Soit Θ la valeur commune de ces trois rapports. Les fonctions p, q, r devront être trois intégrales d'une même équation de Moutard, savoir :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = \Theta p, \tag{8}$$

ou Θ désigne une fonction de u et de v.

3. Réciproquement, si trois fonctions p, q, r de deux variables u, v vérifient une même équation de Moutard, elles sont proportionnelles aux paramètres directeurs de la normale à une certaine surface S, dont les lignes asymptotiques ont pour paramètres directeurs u, v.

En effet, deux de ces fonctions q, r, par exemple, vérifient l'équation

$$q \frac{\partial^2 r}{\partial u\, \partial v} - r \frac{\partial^2 q}{\partial u\, \partial v} = 0;$$

on en déduira, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(q \frac{\partial r}{\partial u} - r \frac{\partial q}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(r \frac{\partial q}{\partial v} - q \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

On en conclura que les fonctions

$$q \frac{\partial r}{\partial u} - r \frac{\partial q}{\partial u}, \quad r \frac{\partial q}{\partial v} - q \frac{\partial r}{\partial v}$$

sont les dérivées partielles d'une même fonction x, de telle sorte qu'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = q \frac{\partial r}{\partial u} - r \frac{\partial q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = r \frac{\partial q}{\partial v} - q \frac{\partial r}{\partial v}.$$

On trouvera également deux autres fonctions y et z satisfaisant aux conditions (5) et (6) et, par suite, aux

suivantes

$$p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

$$p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}+r\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

ce qui démontre l'énoncé.

4. Signalons le cas où, dans l'équation (8), Θ se réduit à une constante a, et observons que la transformation

$$u=\frac{u_1}{a},\qquad v=\frac{v_1}{a}$$

nous conduit immédiatement au cas où $a=1$.

Nous rechercherons donc une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=p,\tag{9}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

Pour $u=u_0$, cette intégrale se réduira à une fonction donnée V de v; et pour $v=v_0$, à une fonction donnée U de u. Il demeure d'ailleurs entendu que $U(u_0)$ et $V(v_0)$ auront une valeur commune A, celle que doit prendre l'intégrale p pour $u=u_0$ et $v=v_0$. Il faudra seulement que la fonction U soit uniforme et finie dans un domaine contenant le point u_0 et qu'il en soit de même pour la fonction V contenant le point v_0.

Remarquons d'abord que l'équation

$$\frac{d^2 p}{\partial u\,\partial v}=p,\tag{9}$$

admet une intégrale p_1, définie comme il suit :

$$(10)\quad p_1 = 1 + \frac{(u-u_0)(v-v_0)}{1^2} + \frac{(u-u_0)^2(v-v_0)^2}{1^2.2^2} + \ldots + \frac{(u-u_0)^n(v-v_0)^n}{1^2.2^2\ldots n^2} + \ldots,$$

la somme de cette série étant uniforme et finie, quelques valeurs qu'on attribue aux variables u et v.

Elle admet également les intégrales p_2 et p_3, définies comme ci-dessous :

$$p_2 = \mathrm{U} + \frac{v-v_0}{1}\int_{u_0}^{u}\mathrm{U}(t)\,dt + \frac{(v-v_0)^2}{2!}\int_{u_0}^{u}(u-t)\,\mathrm{U}(t)\,dt + \ldots + \frac{(v-v_0)^n}{n!}\int_{u_0}^{u}\frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{U}(t)\,dt + \ldots,$$

$$p_3 = \mathrm{V} + \frac{u-u_0}{1}\int_{v_0}^{v}\mathrm{V}(t)\,dt + \frac{(u-u_0)^2}{2!}\int_{v_0}^{v}(v-t)\,\mathrm{V}(t)\,dt + \ldots + \frac{(u-u_0)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{v_0}^{v}\frac{(v-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{V}(t)\,dt + \frac{(u-u_0)^n}{n!}\int_{v_0}^{v}\frac{(v-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{V}(t)\,dt + \ldots.$$

On remarquera que la convergence uniforme de ces deux séries est assurée par les conditions imposées aux fonctions u, v, de sorte que l'intégrale p, définie par l'équation

$$p = p_2 + p_3 - \mathrm{A}p_1,$$

remplit toutes les conditions du problème.

Comme, d'autre part, les fonctions p_2 et p_3 se rattachent directement à la fonction p_1, il suffit de connaître celle-ci pour former l'intégrale p qui nous occupe.

Si nous désignons, en effet, par $p_1(u, v, u_0, v_0)$ le second membre de l'égalité (10), on a les deux identités

suivantes :

$$p_2 = U + \int_{u_0}^{u} \frac{\partial p_1(u, v, t, v_0)}{\partial u} U(t)\,dt,$$

$$p_3 = V + \int_{v_0}^{v} \frac{\partial p_1(u, v, u_0, t)}{\partial v} V(t)\,dt.$$

L'intégrale générale cherchée se présente sous la forme

$$p = U + V - A p_1 + \int_{u_0}^{u} \frac{\partial p_1(u, v, t, v_0)}{\partial u} U(t)\,dt + \int_{v_0}^{v} \frac{\partial p_1(u, v, t, u_0)}{\partial v} V(t)\,dt.$$

5. Montrons maintenant comment l'on peut exprimer simplement la courbure totale en chaque point de la surface définie comme il a été dit ci-dessus. [Nous aurons, à différentes reprises, l'occasion d'écrire une somme de trois termes, tels que chacun d'eux se déduit du précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres x, y, z ou p, q, r. Nous abrégerons en écrivant simplement un terme de cette somme, précédé du signe $\mathbf{S}$]. Rappelons d'abord la relation suivante où ds et $d\sigma$ représentent la différentielle de l'arc et de l'angle de contingence d'une section normale.

$$1 = -\frac{dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,ds\,d\sigma},$$

d'où l'on déduit, en appelant R le rayon de courbure de cette section,

$$(11) \qquad \frac{1}{R} = \frac{-(dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,ds^2}.$$

D'après les propriétés fondamentales des fonctions

p, q, r, le numérateur de la fonction inscrite au second membre peut être remplacé par

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\, dv,$$

ou encore par

$$\mathbf{S}\left[\frac{\partial p}{\partial u}\left(r\frac{\partial q}{\partial v} - q\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \frac{\partial p}{\partial v}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\right] du\, dv,$$

ou enfin par

$$2\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

en vertu des formules (5) et (6). Soit Δ le déterminant qui figure dans cette dernière expression.

En vertu de ces mêmes relations, nous aurons

$$\begin{aligned} ds^2 = & \mathbf{S}\left[\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right) du - \left(q\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial q}{\partial v}\right) dv\right]^2 \\ = & \mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 du^2 \\ & -2\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(q\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial q}{\partial v}\right) du\, dv \\ & +\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} E = & \mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2, \\ F = & -\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(q\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial q}{\partial v}\right), \\ G = & \mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

on aura aussi

$$E = (p^2+q^2+r^2)\left[\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right]$$
$$-\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}+r\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = -(p^2+q^2+r^2)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$
$$-\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}+r\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}+r\frac{\partial r}{\partial v}\right),$$

$$G = (p^2+q^2+r^2)\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$-\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}+r\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2,$$

la formule (11) devient alors

$$(12)\qquad \frac{1}{R} = \frac{-2\Delta\, du\, dv}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)},$$

ou encore

$$\frac{1}{R} = \frac{-2\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(E\dfrac{du}{dv}+2F+G\dfrac{dv}{du}\right)};$$

on en conclut que le rayon de courbure R est maximum ou minimum, lorsqu'on a

$$E\frac{du}{dv} = G\frac{dv}{du}$$

ou

$$(13)\qquad \frac{du}{\sqrt{G}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{E}}.$$

Nous avons donc ainsi obtenu l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface.

Si l'on veut obtenir les expressions des rayons de courbure principaux, on remplacera dans la relation (12) du et dv par les radicaux qui leur sont proportionnels

en vertu de (13) : si donc on appelle R_1 et R_2 ces deux rayons, on aura

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}(\sqrt{EG}+F)},$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{+\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}(\sqrt{EG}-F)},$$

$$(14) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{-\Delta^2}{(p^2+q^2+r^2)(EG-F^2)}.$$

En partant des valeurs de E, F, G, données au début de ce paragraphe, on trouve par un calcul simple

$$EG - F^2 = (p^2+q^2+r^2) \begin{vmatrix} p^2+q^2+r^2 & \mathrm{S}\, p\frac{\partial p}{\partial u} & \mathrm{S}\, p\frac{\partial p}{\partial v} \\ \mathrm{S}\, p\frac{\partial p}{\partial u} & \mathrm{S}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 & \mathrm{S}\,\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} \\ \mathrm{S}\, p\frac{\partial p}{\partial v} & \mathrm{S}\,\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} & \mathrm{S}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (p^2+q^2+r^2)\Delta^2,$$

par suite

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{-1}{(p^2+q^2+r^2)^2},$$

relation extrêmement simple.

6. Nous terminerons cet exposé en cherchant quelles doivent être les fonctions p, q, r pour une surface à courbure constante. En tout point d'une pareille surface, on doit avoir

$$p^2+q^2+r^2 = a^2$$

(a étant une constante réelle ou imaginaire).

Posons $p = ap_1$, $q = aq_1$, $r = ar_1$ et supprimons les indices, il vient

$$(15) \qquad p^2+q^2+r^2 = 1.$$

Les proportions

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}$$

entraînent comme conséquence

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

et, en intégrant par rapport à v,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = f(u);$$

or on peut adopter au lieu de u la variable indépendante $\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$ et, par suite, cette équation n'est pas plus générale que la suivante :

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = 1;$$

on aura, de façon similaire,

$$(17)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

La relation (15) nous conduit à considérer p, q, r comme les coordonnées d'un point mobile sur une sphère de rayon unité et, par suite, à poser

$$p = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$q = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$r = \cos\theta.$$

Par ailleurs, le ds^2 de la sphère a pour valeur

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Développons par rapport à du, dv et rapprochons le développement trouvé des équations (16) et (17), il

vient

$$
(18) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\theta}{du}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{\partial u}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{d\theta}{dv}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{dv}\right)^2 = 1. \end{cases}
$$

L'élimination de φ entre ces deux équations nous montre que la fonction θ est définie par l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

$$
\pm \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}\right].
$$

On ne connaît pas l'intégrale générale de cette équation aux dérivées partielles, mais il serait aisé, comme cas particulier, de trouver la fonction θ relative aux surfaces de révolution à courbure totale constante.

[R8a]

SUR LES FORCES VIVES ÉQUIVALENTES;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. En se plaçant au point de vue de la Mécanique analytique, la force vive apparaît uniquement comme fonction des q, des q' et de t servant à former les équations de Lagrange du mouvement du système matériel de sorte qu'on est naturellement conduit à considérer comme fonction équivalente à la force vive toute fonction des q, des q' et de t qui conduit aux mêmes équations de Lagrange.

Nous conviendrons de dire que toutes ces fonctions sont des *forces vives équivalentes* et, lorsqu'il y aura

lieu, nous distinguerons la *force vive vraie* du système.

2. Considérons d'abord un système holonome dont les équations de Lagrange, écrites avec la force vive vraie, sont

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

et soit

$$T_1 = T + \theta,$$

une force vive équivalente à T; elle donnera les équations de Lagrange

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+\theta)}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial(T+\theta)}{\partial q_i} = Q_i,$$

qui devront être équivalentes aux équations (1) et cela, quel que soit le système des forces données. Des équations (1) et (2) on déduit immédiatement les équations

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} = 0,$$

qui ne dépendent plus des forces et doivent être vérifiées quelle que soit la solution du système (1). Mais, en choisissant convenablement les forces, c'est-à-dire les Q, on peut obtenir une solution de (1) dans laquelle les valeurs initiales des q, des q' et aussi des q'' sont arbitraires, et il en résulte immédiatement que les équations (3) doivent être des identités en y considérant t, les q, les q' et les q'' comme des variables indépendantes.

Les q'' ne figurent pas dans les $\frac{\partial\theta}{\partial q_i}$; pour qu'ils ne figurent pas dans les $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q'_i}\right)$, il faut que les $\frac{\partial\theta}{\partial q'_i}$ ne contiennent pas les q' c'est-à-dire que θ soit une fonc-

tion linéaire des q'

$$\theta = A_1 q'_1 + \ldots + A_n q'_n + B;$$

les identités (3) deviennent alors

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\right) + \sum_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right) q'_k \equiv 0,$$

et nous obtenons les conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

qui expriment que $A_1, \ldots, A_n$, B sont les dérivées partielles, par rapport à $q_1, \ldots, q, t_n$, d'une même fonction

$$\Theta(q_1, \ldots, q_n, t),$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de θ, qu'on a

$$\theta = \frac{d\Theta}{dt};$$

donc

Pour que deux forces vives d'un système holonome soient équivalentes, il faut et il suffit que leur différence soit la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps.

3. Le fait que la condition est suffisante peut se vérifier immédiatement en remarquant que de l'égalité supposée

$$\theta = \frac{d\Theta}{dt}$$

on déduit immédiatement, par des identités bien

connues,

$$\frac{\partial \theta}{\partial q'_i} = \frac{\partial}{\partial q'_i}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \Theta}\right)$$

de sorte qu'on a bien les identités

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \equiv 0.$$

Ce calcul ne suppose pas le système holonome. Dans le cas des systèmes non holonomes, les forces vives équivalentes véritablement à la force vive vraie ne sont pas forcément de la forme

$$T + \frac{d\Theta}{dt},$$

mais nous ne considérerons que celles qui sont de cette forme simple.

4. Nous devons maintenant nous proposer de chercher comment se transforment les propriétés de la force vive vraie quand on la remplace par une force vive équivalente.

Décomposons la force vive vraie en groupes homogènes

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

et faisons de même pour $\frac{d\Theta}{dt}$; c'est une fonction linéaire des q'

$$\frac{d\Theta}{dt} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_0.$$

On aura donc

$$T' = T + \frac{d\Theta}{dt} = T_2 + (T_1 + \mathfrak{T}_1) + (T_0 + \mathfrak{T}_0),$$

de sorte que *la transformation par équivalence ne*

modifie jamais la portion homogène et du second degré de la force vive.

Plus particulièrement, supposons qu'une force vive T du système soit indépendante du temps; pour qu'une autre force vive soit aussi indépendante du temps, il faut que Θ ne contienne pas t; alors $\frac{d\Theta}{dt}$ est homogène par rapport aux q' et l'on a

$$T' = T + \frac{d\Theta}{dt} = T_2 + (T_1 + \mathfrak{E}_1) + T_0,$$

c'est-à-dire :

Toutes les forces vives équivalentes et indépendantes du temps ont les mêmes portions T_2 *et* T_0.

De ce que la force vive vraie est une forme essentiellement positive résulte immédiatement que sa portion T_2 est essentiellement positive. C'est cette propriété de T_2, et non celle de T, qui intervient dans les discussions de problèmes de dynamique; aussi, pour abréger, nous conviendrons de l'appeler *propriété essentielle de la force vive.* Du fait que la transformation n'altère jamais T_2 résulte donc :

Toutes les forces vives équivalentes à la force vive vraie possèdent la propriété essentielle de la force vive.

Enfin, à un point de vue tout à fait pratique, remarquons que si, en formant la force vive vraie, nous rencontrons un ensemble de termes formant une dérivée exacte, nous pourrons le négliger; on n'altérera pas ainsi les équations de Lagrange. En particulier, si nous rencontrons un terme additif qui soit fonction de t seulement, nous pourrons le supprimer et nous supposerons toujours qu'on l'a fait.

5. Considérons le cas où, dans l'expression

$$Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n,$$

du travail virtuel des forces données, les coefficients $Q_1, \ldots, Q_n$ sont les dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

d'une fonction U *pouvant contenir le temps*. Cette fonction U ne correspond plus à la notion de fonction de forces c'est-à-dire à celle de travail ne dépendant que des positions initiale et finale, mais, au point de vue de la dynamique analytique, cette distinction n'a pas d'importance puisque, dans tous les cas, on arrive à la même forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

des équations de Lagrange lesquelles, en posant

$$G = T + U,$$

peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0,$$

ce qui montre que, pour les former, il est inutile théoriquement de connaître les deux fonctions T et U; il suffit de connaître leur somme G, le calcul séparé de T et de U apparaissant seulement comme un moyen commode de calculer G en la décomposant en deux parties dont on connaît des interprétations mécaniques simples.

Pour ces raisons, nous conviendrons de dire que U est *une fonction de forces* et que, *s'il y a une fonction de forces, le système de Lagrange possède une fonction génératrice* qui est la fonction G.

La fonction génératrice ne diffère de T que par U indépendant des q'. Si l'on décompose G et T en groupes homogènes, on aura :

$$G_2 = T_2,$$
$$G_1 = T_1,$$
$$G_0 = T_0 + U;$$

il résulte de la première de ces trois égalités que *la fonction génératrice d'un système de Lagrange possède la propriété essentielle de la force vive.*

La notion de fonctions génératrices équivalentes est identique à celle de forces vives équivalentes et les calculs développés alors nous donnent ce résultat :

Deux fonctions génératrices équivalentes ne diffèrent que par la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps. Toutes les fonctions génératrices possèdent la propriété essentielle de la force vive.

6. Supposons que le problème possède l'intégrale des forces vives. C'est que T est homogène et que t ne figure ni dans T, ni dans U; cette intégrale est

$$T - U = h.$$

Les équations de Lagrange ont alors une fonction génératrice $T + U$ indépendante du temps et, par suite, une infinité de fonctions génératrices satisfaisant à cette condition et données par

$$G = T + U + \frac{d\Theta}{dt},$$

la fonction Θ ne dépendant pas de t. $\frac{d\Theta}{dt}$ étant linéaire et homogène par rapports aux q', on aura donc

$$G_2 = T, \qquad G_0 = U.$$

de sorte qu'au moyen d'une quelconque de ces fonctions génératrices indépendantes du temps, l'intégrale des forces vives prendra la forme

$$G_2 - G_0 = h.$$

7. Réciproquement, supposons qu'un système de Lagrange soit tel que, parmi ses fonctions génératrices, il y en ait qui soient indépendantes de t. Soit G l'une d'elles au moyen de laquelle nous écrirons les équations de Lagrange. Si nous multiplions ces équations respectivement par les q', puis qu'on additionne et qu'on fasse les réductions indiquées par M. Painlevé ([1]), on arrive à l'équation

$$\frac{d}{dt}(G_2 - G_0) = 0,$$

c'est-à-dire à l'intégrale première

$$G_2 - G_0 = \text{const.}$$

Cette intégrale a rigoureusement la même forme que celle des forces vives exprimée au moyen d'une fonction génératrice et l'on peut montrer, ce que nous ferons dans un Mémoire ultérieur, que le rôle particulier de l'intégrale des forces vives dans l'intégration tient uniquement à cette forme. Pour ces raisons, nous conviendrons d'appeler *intégrale des forces vives* l'intégrale précédente qui existe quand G est indépendante de t en remarquant que les hypothèses restrictives relatives à l'existence de *l'intégrale ordinaire des forces vives* servent simplement à mettre en évidence un cas fréquent où l'on sait *a priori* qu'il y a une fonction génératrice

---

([1]) Painlevé, *Leçons sur l'intégration des équations de la mécanique*, p. 89.

indépendante du temps, fonction dont on sait former l'expression immédiate au moyen de la force vive vraie et de la fonction de forces.

8. On est ainsi amené à se poser la question suivante :

Ayant calculé les fonctions T *et* U *et formé la fonction génératrice* $T + U$ *qu'on suppose dépendre de* t, *reconnaître si le système de Lagrange admet des fonctions génératrices indépendantes de* t *et les former?*

Soit

$$G' = G + \frac{d\Theta}{dt},$$

une fonction génératrice indépendante du temps. On devra avoir

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right),$$

donc la condition cherchée est que $\frac{\partial G}{\partial t}$ soit une dérivée totale exacte. Cette condition exige que $\frac{\partial G}{\partial t}$ soit linéaire par rapport aux q', donc que la portion G_2 soit indépendante de t. S'il en est ainsi, on aura

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial G_0}{\partial t},$$

et le calcul de vérification à faire pour voir si c'est une dérivée totale exacte est bien connu.

Supposons cette condition remplie ; $\frac{\partial G}{\partial t}$ sera la dérivée totale $\frac{dW}{dt}$ d'une fonction W qu'on formera, par le

procédé connu, au moyen de quadratures successives et l'égalité écrite plus haut s'écrira

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\Theta}{\partial t}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = - W + K,$$

ce qui donnera Θ par une quadrature partielle. Ainsi :

L'existence des fonctions génératrices indépendantes du temps se reconnaît par de simples différentiations et ces fonctions s'obtiennent ensuite par des quadratures.

9. La condition précédente permet de généraliser encore plus la notion d'intégrale des forces vives.

Le calcul de M. Painlevé, fait sans aucune hypothèse sur la fonction génératrice, conduit à l'équation

$$\frac{d}{dt}(G_2 - G_0) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

d'où l'on conclut que si $\frac{\partial G}{\partial t}$ est une dérivée totale exacte

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dW}{dt}.$$

On a une intégrale première

$$G_2 - G_0 + W = h.$$

Nous remarquons immédiatement que l'hypothèse faite est précisément celle qui est relative à l'existence des fonctions génératrices indépendantes du temps. Ces fonctions seront données par

$$G' = G + \frac{d\Theta}{dt}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = - W + K,$$

d'où l'on déduit

$$G'_2 = G_2, \quad G'_0 = G_0 + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = G_0 - W + K,$$

ce qui permet d'écrire l'intégrale considérée sous la forme

$$G'_2 - G'_0 + K = h,$$

ou

$$G'_2 - G'_0 = \text{const.},$$

qui est celle d'une intégrale des forces vives. Donc :

Quand il y a une fonction génératrice, l'intégrale de M. Painlevé entraîne l'existence de fonctions génératrices indépendantes du temps au moyen desquelles elle devient une intégrale des forces vives.

Cette remarque montre que tous les cas d'intégration qui supposent l'existence de l'intégrale ordinaire des forces vives s'appliqueront sans aucune modification au cas de l'intégrale complètement généralisée de M. Painlevé.

10. Ce qui précède nous amène à dire un mot des cas de décomposition de l'intégrale des forces vives dans sa forme générale.

Il arrive très fréquemment que, dans un problème à fonction génératrice, les paramètres se répartissent en plusieurs groupes $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$ et que la fonction génératrice immédiate, ou cette fonction convenablement modifiée par équivalence, se décompose sous la forme

$$G = G_a + G_b + \ldots$$

G_a ne contenant que les a et les a', G_b ne contenant que les b et les b', etc. Il est alors évident que le sys-

tème de Lagrange se décompose en systèmes partiels ayant respectivement G_a, G_b, ... comme fonctions génératrices, s'intégrant indépendamment les uns des autres, et déterminant chacun les paramètres d'un groupe ; il est d'ailleurs facile de démontrer que G_a, G_b possèdent, comme G, la propriété essentielle de la force vive, donc sont de vraies fonctions génératrices. Si G est indépendant de t, on a l'intégrale des forces vives

$$G_2 - G_0 = h;$$

mais G_a, G_b,... sont alors forcément indépendants de t de sorte que chaque système partiel donne une intégrale des forces vives. On obtient ainsi

$$(G_a)_2 - (G_a)_0 = h_a$$
$$(G_b)_2 - (G_b)_0 = h_b$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et, si l'on fait la somme de toutes ces intégrales, on retrouve l'intégrale des forces vives du système total de Lagrange. Donc :

S'il y a séparation des paramètres en plusieurs groupes, le système de Lagrange se décompose en systèmes partiels indépendants; si l'intégrale des forces vives existe pour le problème total, elle se décompose en plusieurs intégrales de forces vives correspondant aux divers groupes de paramètres.

En particulier, si un paramètre est *isolé* c'est-à-dire forme un groupe à lui seul et si le problème total possède l'intégrale des forces vives, on aura cette intégrale pour le groupe composé de ce seul paramètre a, c'est-à-dire une équation

$$f(a)\,a'^2 - \varphi(a) = h,$$

de la forme classique

$$a'^2 = F(a),$$

qui déterminera ce paramètre indépendamment de tous les autres.

Il est à remarquer que si G dépend de t, on ne peut en conclure que G_a, G_b... dépendent tous de t; il peut arriver que certaines portions de G soient indépendantes de t, mais elles ne peuvent l'être toutes. Les portions G_a,... indépendantes du temps donneront des intégrales de forces vives, de sorte que :

S'il y a séparation des paramètres en plusieurs groupes, il peut arriver que le problème total n'admette pas l'intégrale des forces vives et que, néanmoins, l'on ait une ou plusieurs intégrales de forces vives fournies par les problèmes partiels.

[O4g]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

Je me propose de développer ici quelques résultats intéressants qui se rattachent à la déformation infiniment petite des surfaces réglées et que j'ai résumés en partie dans deux Communications à l'Académie des Sciences (19 avril et 24 avril 1909).

I.

1. Rappelons d'abord [1] que les équations de toute

[1] *Voir* G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 24 et suiv.

surface (S) non développable rapportée à ses lignes asymptotiques peuvent s'écrire

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \int \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta,\\
y &= \int \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta,\\
z &= \int \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta,
\end{aligned}
\right.
$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont trois solutions d'une équation de la forme

$$
(\mathrm{B})\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta,
$$

et représentent d'ailleurs des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale en M (α, β), et liées, de plus, par la relation

$$
\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sqrt{-RR'},
$$

où R et R′ désignent les rayons de courbure principaux de la surface en M. De sorte que, pour une surface et un point donnés, ces trois fonctions ont des valeurs parfaitement déterminées [1].

Si ω est une solution quelconque de (B), la surface (S_1) la plus générale qui corresponde à (S) avec orthogonalité des éléments est donnée par les formules

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \int \left(\theta_1 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta,\\
y_1 &= \int \left(\theta_2 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta,\\
z_1 &= \int \left(\theta_3 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta,
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Il convient cependant de remarquer que la surface ne change pas si l'on change les signes des θ_i et qu'elle se transforme en sa symétrique par rapport à l'origine si l'on multiplie tous les θ_i

Remarquons que deux solutions différentes ω et ω' de (B) ne peuvent jamais donner la même surface (S_1), car s'il en était ainsi, on aurait

$$\theta_1 \frac{\partial(\omega - \omega')}{\partial \alpha} - (\omega - \omega') \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = 0,$$

et les équations analogues en θ_2 et θ_3. Ces équations ne sont compatibles que pour $\omega = \omega'$, car les déterminants tels que $\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}$ ne peuvent être tous trois nuls, sans quoi la surface (S) se réduirait à une courbe.

2. Cela posé, cherchons ce que doivent être les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, k$ pour que la surface (S) soit une surface réglée, dont les génératrices rectilignes aient pour paramètre α.

Considérons le point m de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. La droite Om est parallèle à la normale en M à (S); elle est donc dans le plan (π) mené par O perpendiculairement à la génératrice D qui passe par M. Ce plan enveloppe, lorsque α varie, le cône supplémentaire du cône directeur de la surface. Nous supposerons que ce dernier ne se réduit pas à un plan, nous réservant *d'examiner plus tard le cas des surfaces à plan directeur*. Dans ces conditions, soient a, b, c, les coordonnées (fonctions de α) d'un point quelconque n de la caractéristique du plan (π), c'est-à-dire de la perpendiculaire OA au plan asymptote de (S), lequel est, comme on sait, parallèle au plan tangent au cône

---

par $\sqrt{-1}$. Ceci prouve en particulier qu'on ne peut avoir toutes les surfaces réelles à lignes asymptotiques réelles en se bornant à considérer les solutions réelles de (B); il faut leur adjoindre les solutions imaginaires pures.

directeur. Quand α varie, n décrit une courbe tangente au plan (π), de sorte que les dérivées a'. b', c' de a, b, c par rapport à α sont les coordonnées d'un point de (π) non situé sur On [1]. Il suit de là que θ_1, θ_2, θ_3, qui sont les coordonnées d'un point de (π), peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \theta_1 = \lambda a + \mu a', \qquad \theta_2 = \lambda b + \mu b', \qquad \theta_3 = \lambda c + \mu c',$$

λ et μ désignant deux fonctions convenables de α et β. Écrivons que θ_1 vérifie (B)

$$(2)\quad a\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\lambda\right) + a'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\mu\right) + a''\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

On a deux équations analogues obtenues en remplaçant a par b et c. Remarquons à présent que le déterminant $\| a \quad a' \quad a'' \|$ ne saurait être nul, sans quoi la courbe lieu de n serait dans un plan passant par O et la droite D serait constamment perpendiculaire à ce plan, ce qui n'est pas possible, puisque la surface (S) serait alors cylindrique. Les équations telles que (2) entraînent donc les suivantes

$$(3)\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\lambda = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\mu = 0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

La dernière nous montre que μ ne dépend que de α. Rappelons-nous maintenant que le point n a été choisi arbitrairement sur la droite OA; nous pouvons donc, sans rien changer à la surface (S), remplacer a, b, c, par ρa, ρb, ρc, ρ étant une fonction quelconque de α. Dans ces conditions, θ_1, par exemple, devient égal à $(\lambda\rho + \mu\rho')a + \mu\rho a'$. Comme μ ne peut être nul (sans quoi Om décrirait un cône, la surface serait dévelop-

---

[1] Ceci serait précisément en défaut si la surface était à plan directeur, car, dans ce cas, la droite OA serait fixe, puisque perpendiculaire au plan directeur.

pable), on peut prendre $\mu\rho = 1$. Cela revient évidemment à *supposer* $\mu = 1$ *dans les formules* (1). Moyennant cette hypothèse, les équations (3) se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - k\lambda = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - k = 0. \tag{4}$$

Éliminons k, il vient

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\lambda = 0. \tag{5}$$

Intégrons par rapport à β :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\lambda^2 = A_1' - \frac{1}{2}A_1^2, \tag{6}$$

en appelant A_1 une fonction arbitraire de α. Nous obtenons une équation de Riccati, dont nous connaissons une solution particulière A_1. En l'intégrant par la méthode habituelle, on est conduit, pour éviter les quadratures, à poser successivement

$$A_1 = -\frac{A_2'}{A_2}, \qquad A_2 = -\frac{1}{2A'}.$$

L'intégrale générale de l'équation (6), et par suite de (5), s'écrit alors

$$\lambda = \frac{A''}{A'} - \frac{2A'}{A+B},$$

où A et B sont deux fonctions arbitraires de α et β respectivement. La deuxième équation (4) nous donne ensuite

$$k = \frac{2A'B'}{(A+B)^2}.$$

Nous pouvons d'ailleurs simplifier ces expressions par un choix convenable des paramètres α et β, qui, jusqu'à présent, ont été supposés pris d'une manière quelconque. Si l'on remarque qu'aucune des fonctions A et B ne peut se réduire à une constante (comme on

le voit en portant, dans une telle hypothèse, la valeur de λ dans les expressions (1) de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$), on a le droit de choisir A pour paramètre α et B pour paramètre β. Dans ces conditions, on a

$$\lambda = -\frac{2}{\alpha+\beta}, \qquad k = \frac{2}{(\alpha+\beta)^2};$$

puis,

$$(7) \quad \theta_1 = -\frac{2a}{\alpha+\beta} + a', \quad \theta_2 = \frac{-2b}{\alpha+\beta} + b', \quad \theta_3 = \frac{-2c}{\alpha+\beta} + c'.$$

Quand à l'équation (B), elle devient

$$(8) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{2\theta}{(\alpha+\beta)^2}.$$

On reconnaît *l'équation à invariants égaux dont l'intégrale générale est du second rang* (*cf.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 143). Cette intégrale générale est, comme on sait,

$$(9) \qquad \omega = \frac{2(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\alpha+\beta} - (\mathrm{A}'+\mathrm{B}'),$$

en appelant A une fonction arbitraire de α et B une fonction arbitraire de β.

Si nous portons maintenant ces valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, ω dans (A) et (C), nous obtenons sans difficulté

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2(cb'-bc')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (b'c''-c'b'')\,d\alpha, \\ y = \dfrac{2(ac'-ca')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (c'a''-a'c'')\,d\alpha, \\ z = \dfrac{2(ba'-ab')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (a'b''-b'a'')\,d\alpha, \end{cases}$$

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} x_1 = a'\mathrm{B}' + \dfrac{2(a\mathrm{A}'-a'\mathrm{A}-a\mathrm{B}'-a'\mathrm{B})}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (\mathrm{A}'a''-\mathrm{A}''a')\,d\alpha, \\ y_1 = b'\mathrm{B}' + \dfrac{2(b\mathrm{A}'-b'\mathrm{A}-b\mathrm{B}'-b'\mathrm{B})}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (\mathrm{A}'b''-\mathrm{A}''b')\,d\alpha, \\ z_1 = c'\mathrm{B}' + \dfrac{2(c\mathrm{A}'-c'\mathrm{A}-c\mathrm{B}'-c'\mathrm{B})}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (\mathrm{A}'c''-\mathrm{A}''c')\,d\alpha. \end{cases}$$

Dans ces formules, *les trois fonctions* a, b, c *peuvent être choisies arbitrairement*, sous la seule condition

$$(10) \qquad \delta = \| \, a \quad a' \quad a'' \, \| \neq 0 \, ;$$

car, quelles qu'elles soient, θ_1, θ_2, θ_3 vérifient bien (8) et, en outre, les lignes (α) de la surface représentée par les équations (D) sont visiblement des droites.

Finalement, nous avons, en (D), *les équations de la surface réglée* (S) *la plus générale n'ayant pas de plan directeur et rapportée à ses lignes asymptotiques; les équations* (E) *définissent la surface* (S_1) *la plus générale qui corresponde à* (S) *avec orthogonalité des éléments.*

M. Goursat est arrivé à ces résultats dès 1896, en cherchant des applications de certaines propriétés générales des équations linéaires et de la méthode de Laplace (*Sur les équations linéaires et la méhode de Laplace*, *American Journal of Mathematics*, t. XVIII, n° 4; *Sur les lignes asymptotiques*, *Bull. de la Soc. math. de France*, 1896; *Comptes rendus*, 9 mars 1896). Il a même indiqué le moyen de se débarrasser des quadratures qui figurent dans les deux groupes de formules, ce qu'avait d'ailleurs déjà fait M. Kœnigs, pour les surfaces réglées seulement, par une méthode entièrement différente (*Comptes rendus*, 2 janvier 1888).

3. Avant d'aborder l'étude des propriétés géométriques qu'on peut déduire des formules précédentes, nous allons présenter quelques remarques, qui seront très utiles dans la suite.

Posons-nous d'abord la question suivante : *Une surface réglée* (S) *étant donnée, y a-t-il plusieurs manières de mettre ses équations sous la forme* (D)?

Autrement dit, peut-on trouver trois nouvelles fonctions a_0, b_0, c_0 de α donnant naissance à la même surface que les trois fonctions a, b, c? S'il en est ainsi, à tout point M de (S) correspondent deux systèmes de coordonnées (α, β) et (α_0, β_0), et comme, pour chacun d'eux, les lignes coordonnées sont les asymptotiques, α_0 est nécessairement une fonction de α et β_0 une fonction de β. De plus, les fonctions $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ de α_0, β_0 qui correspondent au deuxième système prennent nécessairement, au point M, les mêmes valeurs que les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de α, β ou que les fonctions $-\theta_1$, $-\theta_2$, $-\theta_3$, comme cela résulte de la signification géométrique de ces quantités (n° 1) [1].

On a donc, par exemple, l'identité suivante

$$\theta'_1(\alpha_0, \beta_0) \equiv \theta_1(\alpha, \beta). \tag{11}$$

En outre,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k(\alpha, \beta).\,\theta_1, \qquad \frac{\partial^2 \theta'_1}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = k(\alpha_0, \beta_0).\,\theta'_1. \tag{12}$$

Or, de (11) on tire

$$\frac{\partial^2 \theta'_1}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\,\frac{d\beta}{d\beta_0};$$

en portant dans (12), il vient

$$k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta \equiv k(\alpha_0, \beta_0)\,d\alpha_0\,d\beta_0.$$

Le changement de variables $(\alpha \mid \alpha_0, \beta \mid \beta_0)$ doit donc transformer en lui-même l'élément linéaire

$$ds^2 = k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{13}$$

---

[1] *Cette condition nécessaire est aussi suffisante*, car les formules (A) conservent la même forme après tout changement de variables qui ne change pas les lignes coordonnées.

Or, dans le cas actuel, cet élément linéaire est

$$ds^2 = \frac{2\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2}.$$

On reconnaît l'élément linéaire d'une sphère et l'on sait que la transformation la plus générale qui le laisse invariant est donnée par les formules

$$(14) \qquad \alpha_0 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \qquad \beta_0 = \frac{m\beta - n}{-p\beta + q},$$

où m, n, p, q sont quatre constantes arbitraires [1].

Si maintenant on remplace, dans (11), θ_1 et θ'_1 par leurs valeurs tirées de (7), on a l'identité

$$-\frac{2a_0}{\alpha_0+\beta_0} + \frac{da_0}{d\alpha_0} = \frac{-2a}{\alpha+\beta} + \frac{da}{d\alpha};$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (14), l'unique condition

$$(15) \qquad a_0 = a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}.$$

Si l'on avait supposé $\theta'_1 = -\theta_1$, on serait encore arrivé à (13), donc à (14); seulement (15) aurait été remplacé par

$$(16) \qquad a_0 = -a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}.$$

Finalement, la question que nous nous étions posée est entièrement résolue et admet la réponse suivante : *La surface* (S) *étant donnée sous la forme* (D), *la manière la plus générale de l'obtenir sous la même forme consiste à faire le changement de variables* (14) *et à remplacer les fonctions* a, b, c *de* α *par les fonctions* a_0, b_0, c_0 *de* α_0 *déduites des précédentes par les formules* (15) *ou* (16).

---

[1] *Cf.* Darboux, *loc. cit.*, t. I, p. 30, 31.

4. On peut se poser une question analogue pour la surface (S_1) : *Les fonctions* a, b, c *étant données, peut-on trouver deux couples de fonctions* (A, B) et (A_1, B_1) *qui, substituées dans les formules* (E), *donnent les mêmes valeurs pour* x_1, y_1, z_1?

Nous savons (n° 1) que les valeurs correspondantes de ω doivent être nécessairement identiques. D'où il résulte, suivant la formule (9), que les différences $A_2 = A_1 - A$, $B_2 = B_1 - B$ doivent satisfaire à l'identité

$$A'_2 + B'_2 - \frac{2(A_2 - B_2)}{\alpha - \beta} = 0.$$

Or, si l'on donne à β une valeur numérique quelconque, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre en A_2; en l'intégrant, on constate que A_2 doit être un trinome du second degré en α. De même, B_2 doit être un trinome du second degré en β. En employant la méthode des coefficients indéterminés, on arrive immédiatement au résultat suivant :

Pour que les fonctions A_1, B_1 *donnent pour* x_1, y_1, z_1, *les mêmes valeurs que les fonctions* A, B, *il faut et il suffit qu'on puisse trouver trois constantes* m, n, p *telles que*

$$(17)\quad A_1 = A + m\alpha^2 + n\alpha + p, \qquad B_1 = B - m\beta^2 + n\beta - p.$$

5. Nous terminerons nos remarques préliminaires par l'introduction de l'équation différentielle

$$(18)\qquad \theta''' + \lambda\theta'' + \mu\theta' - \nu\theta = 0,$$

dont les coefficients λ, μ, ν sont entièrement déterminés par la condition que l'équation soit vérifiée par les trois fonctions linéairement indépendantes a, b, c.

Cette équation caractérise la surface (S), *aux*

transformations homographiques près qui conservent le plan de l'infini.

En effet, soient a_0, b_0, c_0 trois quelconques de ses solutions, qui soient linéairement indépendantes, on a

$$(19)\quad \begin{cases} a_0 = m a + m_1 b + m_2 c, \\ b_0 = n a + n_1 b + n_2 c, \\ c_0 = p a + p_1 b + p_2 c, \end{cases}$$

$m, m_1, \ldots, p_2$ désignant neuf constantes dont le déterminant n'est pas nul.

Calculons les valeurs correspondantes de x_0, y_0, z_0 que donnent les formules (D). A cet effet, nous remarquons que les quantités $c_0 b'_0 - b_0 c'_0$ et $c''_0 b'_0 - b''_0 c'_0$ peuvent être regardées comme les produits respectifs de la matrice $\begin{Vmatrix} n & n_1 & n_2 \\ p & p_1 & p_2 \end{Vmatrix}$ par les matrices $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Vmatrix}$. On en conclut que, si M, $M_1, M_2, \ldots, P_2$ sont les mineurs de Δ relatifs à m, m_1, $m_2, \ldots, p_2$, on a en négligeant les constantes additives qui proviennent des quadratures,

$$(20)\quad \begin{cases} x_0 = M x + M_1 y + M_2 z, \\ y_0 = N x + N_1 y + N_2 z, \\ z_0 = P x + P_1 y + P_2 z, \end{cases}$$

formules qui définissent bien la transformation homographique la plus générale conservant le plan de l'infini.

On peut utiliser cette proposition pour *simplifier l'étude des propriétés projectives de* S. Par exemple, cherchons la *condition pour que la ligne* (β) *soit une droite*. D'après ce qui précède, cette condition ne doit intéresser que les fonctions λ, μ, ν. Pour l'obtenir rapidement, nous pouvons supposer qu'on a ramené la

droite en question à être dirigée suivant Oz. Si nous écrivons alors que la normale le long de la ligne (β) reste perpendiculaire à Oz, ce qui s'exprime par $\theta_3 = 0$, nous obtenons [1]

$$c' - \frac{2c}{\alpha - \beta} = 0.$$

d'où

$$c = m(\alpha + \beta)^2, \qquad (m = \text{const.}).$$

En portant dans (18), nous obtenons la condition cherchée

$$(21) \qquad 2\lambda + 2\mu(\alpha - \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0.$$

Pour que la surface possède deux droites (β), il faut et suffit que l'équation (21) admette deux racines constantes en β, ce qui donne les deux conditions

$$\frac{\mu}{\nu} + \alpha = \text{const.}, \qquad \frac{2\lambda}{\nu} + \frac{2\mu\alpha}{\nu} + \alpha^2 = \text{const.}$$

Pour que la surface (S) *soit du second degré*, il faut et suffit que l'équation (21) soit vérifiée quel que soit β; d'où les conditions

$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

Dans le cas où il y a une seule droite (β), on peut, grâce à la transformation (14), supposer qu'elle correspond à la valeur $\beta = \infty$; la condition (21) se réduit alors à $\nu = 0$. Il peut arriver que *cette droite compte pour deux*, c'est-à-dire que la valeur correspondante de β soit racine double de l'équation (21); en supposant toujours cette racine infinie, cela se traduit par les

[1] Cette condition évidemment nécessaire est aussi suffisante, car si le plan tangent en chaque point de la ligne (β) est parallèle à Oz, cette ligne est forcément une droite parallèle à Oz, puisque tous ses plans osculateurs sont parallèles à cette droite.

conditions $\mu = \nu = 0$. Ce cas se distingue du précédent par le fait que *la variation du plan tangent le long de la droite considérée obéit à la loi de Chasles*. Ceci peut s'établir d'une manière intuitive en supposant que la surface possède deux droites (β) infiniment voisines.

Quant à la démonstration analytique rigoureuse, elle peut se faire de la manière suivante. Prenant, comme plus haut, la droite pour axe des z, on trouve sans peine que le plan tangent au point M (α, ∞) a pour équation

$$a'X + \theta'\Psi = 0.$$

d'autre part, la cote de M est

$$z = \int (a'b'' - b'a'')\, d\alpha.$$

Le lecteur établira aisément que pour que z soit fonction homographique de $\frac{b'}{a'}$, il faut et suffit qu'on ait une identité de la forme.

$$ma' + nb' = p \qquad (m, n, p = \text{const.}).$$

On peut d'ailleurs, par une substitution telle que (19), supposer $n = 0$, c'est-à-dire égaler a' à une constante, d'ailleurs non nulle à cause de (10). En portant cette hypothèse dans (18) (où l'on suppose, bien entendu, $\nu = 0$), on trouve immédiatement que la condition cherchée est $\mu = 0$.

II.

Nous allons maintenant passer en revue les conséquences diverses qui découlent des formules (D) et (E), des remarques précédentes et des propriétés générales de la déformation infiniment petite des surfaces.

6. *Étude de* (S). — Voyons, en premier lieu, comment les équations (D) permettent d'étudier les principales propriétés de la surface réglée.

Rappelons d'abord que les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan asymptote sont proportionnels à a, b, c : nous les désignerons par $\frac{a}{\rho}, \frac{b}{\rho}, \frac{c}{\rho}$, en posant, par suite,

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{22}$$

Ceux de la génératrice sont, de même,

$$\frac{cb' - bc'}{\rho_1}, \qquad \frac{ac' - ca'}{\rho_1}, \qquad \frac{ba' - ab'}{\rho_1}, \tag{23}$$

avec

$$\rho_1^2 = \mathrm{S}(cb' - bc')^2 = \rho^2(\sigma^2 - \rho'^2), \tag{24}$$

en posant

$$\sigma^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2. \tag{25}$$

Enfin, ceux de la normale en M sont

$$\frac{\theta_1}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_2}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_3}{\rho_2},$$

en posant

$$\rho_2^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sigma^2 - \rho'^2 + \left(\frac{2\rho}{\alpha - \beta} - \rho'\right)^2. \tag{26}$$

On sait d'ailleurs que $\rho_2^4 = -\mathrm{RR}'$ (n° 1). On sait aussi, d'après la formule d'Enneper, que ρ_2^2 est égal, au signe près, au rayon de torsion τ de la ligne (β) qui passe par M. C'est ce qu'il est aisé de vérifier par une méthode directe, qui vous donnera, du même coup, le signe de τ.

D'après ce qui a été vu au n° 3, nous pouvons nous borner à considérer la ligne $\beta = \infty$. La courbe étant supposée orientée d'une manière quelconque et s dési-

gnant son arc, les cosinus directeurs de sa tangente et de sa binormale sont respectivement

$$(b'c''-c'b'')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad (c'a''-a'c'')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad (a'b''-b'a'')\frac{d\alpha}{ds};$$

$$\frac{\theta_1}{\rho_2}=\frac{a'}{\sigma}, \qquad \frac{\theta_2}{\rho_2}=\frac{b'}{\sigma}, \qquad \frac{\theta_3}{\rho_2}=\frac{c'}{\sigma}.$$

On en déduit ceux de la normale principale, qui doit former un trièdre trirectangle positif avec les deux autres droites; le cosinus relatif à Ox est, par exemple,

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}\Big[b'(a'b''-b'a'')-c'(c'a''-a'c'')\Big]$$
$$=\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}\left(a'\sigma\sigma'-a''\sigma^2\right)=\frac{d\alpha}{ds}\left(a'\sigma'-a''\sigma\right).$$

En appliquant une des formules de Frenet, on a alors

$$\frac{a''}{\sigma}-\frac{a'\sigma'}{\sigma^2}=\frac{a'\sigma'-a''\sigma}{\tau};$$

d'où $\tau=-\sigma^2$. Donc, dans le cas général, on a

$$\tau=-\rho_2^2. \tag{27}$$

Cherchons maintenant *le point central* M_0. La normale en ce point doit être dans le plan asymptote; d'où la condition

$$a\theta_1+b\theta_2+c\theta_3=0,$$

dont on tire

$$\beta_0=\frac{2\rho}{\rho'}-\alpha. \tag{28}$$

En portant cette valeur dans (D), on aura les équations de la ligne de striction.

Calculons le *paramètre de distribution* ϖ. La génératrice étant orientée par les cosinus directeurs (23), la mesure algébrique h du vecteur (M_0M) est

$$h=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{2}{\alpha+\beta_0}\right)=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{\rho'}{\rho}\right). \tag{29}$$

D'autre part, soit V l'angle du plan central avec le plan tangent en M, angle mesuré autour de la génératrice orientée. On a, par définition,

$$\varpi = \frac{h}{\operatorname{tg} V}.$$

Or, pour calculer tang V, il nous suffit d'avoir les cosinus directeurs de la demi-droite qui forme avec la génératrice et la normale au plan asymptote un trièdre trirectangle positif. Comme nous connaissons les cosinus de ces deux dernières droites, nous pouvons en déduire ceux de la première; le cosinus relatif à Ox, par exemple, est

$$\frac{1}{\rho\rho_1}\Big[b(ba' - ab') - c(ac' - ca')\Big]$$
$$= \frac{1}{\rho\rho_1}\Big[a'\rho^2 - a\rho\rho'\Big] = \frac{a'\rho - a\rho'}{\rho_1}.$$

On a alors

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{1}{\rho} S\, a\theta_1}{\frac{1}{\rho_1} S\,(a'\rho - a\rho')\theta_1} = \frac{\rho_1\left(\rho^1 - \frac{2\rho}{\alpha+\beta}\right)}{\rho(\sigma^2 - \rho'^2)} = \frac{h}{\rho'^2 - \sigma^2}.$$

Par conséquent,

$$(30) \qquad \varpi = \rho'^2 - \sigma^2 \text{ [1]}.$$

La comparaison des équations (24), (26), (27), (29)

---

[1] On peut remarquer que ce paramètre de distribution est essentiellement négatif, tant que a, b, c sont réels. Il en est de même du rayon de torsion τ calculé plus haut. Mais, ceci ne doit pas nous étonner, car nous savons (n° 1) qu'en ne donnant que des valeurs réelles à a, b, c on n'obtient pas toutes les surfaces réelles. Pour les avoir toutes, il faut admettre les valeurs imaginaires pures, ce qui donne alors un paramètre de distribution et un rayon de torsion positifs.

et (30) nous conduit à la suivante

$$\rho_2^2 = -\tau = -\varpi - \frac{\rho^2 h^2}{\rho_1^2} = -\varpi + \frac{h^2}{-\varpi};$$

d'où la formule très élégante

$$(31) \qquad h^2 - \varpi^2 = \tau\varpi,$$

qui peut se traduire par la construction suivante :

Étant donnée une surface réglée, soit M *un de ses points et* M_0 *le point central de la génératrice qui passe par* M. *Élevons en* M_0 *une perpendiculaire* Δ *à* M_0M *et portons-y une longueur* M_0K *égale au paramètre de distribution. Le plan mené par* M *perpendiculairement à* KM *rencontre* Δ *en un point* K' *tel que* KK' *est égal au rayon de torsion en* M *de la ligne asymptotique qui passe par* M. *De plus, ce rayon de torsion a même signe que le paramètre de distribution.*

Bien entendu, on peut dire aussi que *la courbure totale en* M *est égale à* $-\frac{1}{\overline{KK'}^2}$. En particulier, *la courbure totale au point central est* $-\frac{1}{\varpi^2}$.

La formule (28) nous donne immédiatement la solution du problème suivant : *Trouver les surfaces réglées dont la ligne de striction est en même temps ligne asymptotique*. En effet, nous pouvons supposer (n° 3) que cette ligne asymptotique correspond à $\beta = \infty$, ce qui nous donne la condition nécessaire et suffisante $\rho' = 0$. *On aura toutes les solutions du problème en prenant pour* a, b, c *trois fonctions quelconques vérifiant l'identité*

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1.$$

Dans ce cas *le paramètre de distribution est égal, en grandeur et en signe, au rayon de torsion de la ligne de striction*. Il se réduit d'ailleurs à $-\tau^2$, de sorte qu'il sera constant si l'on prend

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \text{const.}$$

7. *Étude de* (S_1). — Les seules propriétés de cette surface qui semblent intéressantes sont relatives aux lignes (α). *A priori*, celles-ci doivent être planes, le plan de chacune d'elles étant perpendiculaire à la génératrice correspondante de (S). C'est ce qu'il est aisé de vérifier sur les équations (E). Posons, pour abréger, nous avons

$$u = \int (A'a'' - A''a')\,d\alpha, \qquad v = \int (A'b'' - A''b')\,d\alpha,$$
$$w = \int (A'c'' - A''c')\,d\alpha;$$

$$(32)\qquad (x_1 - u)(cb' - bc') + (y_1 - v)(ac' - ca') + (z_1 - w)(ba' - ab') = 0.$$

Telle est l'équation du plan de la ligne (α), si l'on regarde x_1, y_1, z_1, comme les coordonnées courantes. Ce plan enveloppe une développable Δ dont le cône directeur est supplémentaire de celui de (S). Elle dépend de la fonction arbitraire A, ce qui incite à penser qu'elle constitue la développable la plus générale admettant le cône directeur précédent. Effectivement, si l'on se donne cette développable, il faut déterminer la fonction A de façon qu'on ait

$$(33)\qquad u(cb' - bc') + v(ac' - ca') + w(ba' - ab') = p,$$

p désignant une fonction donnée de α.

Si l'on remarque que

$$u = A'a' - 2A''a + 2\int A'''a\,d\alpha,$$

l'équation précédente s'écrit

$$(cb'-bc')\int \mathrm{A}'''a\,d\alpha+(ac'-ca')\int \mathrm{A}'''b\,d\alpha$$
$$+(ba'-ab')\int \mathrm{A}'''c\,d\alpha=\frac{p}{2}.$$

Si on la dérive trois fois de suite, en remplaçant, au fur et à mesure qu'elles apparaissent, les dérivées troisièmes de a, b, c par leurs valeurs tirées de (18), on obtient, tous calculs faits,

$$2\mathrm{A}'''\delta=-\lambda(\lambda p'+\mu p+p'')+\nu p-\lambda p''-\lambda' p'-\mu p'-\mu' p-p'''.$$

Donc, *se donner la développable* Δ *équivaut à se donner* A''' *et même* A, puisqu'on peut, sans changer (S_1), ajouter à cette fonction un trinome du second degré quelconque en α, quitte à modifier B (n° 4).

En particulier, *si la développable* Δ *est un cône de sommet* O, on a $p=0$; *on peut donc prendre* $\mathrm{A}=0$. Alors u, v, w sont des constantes nécessairement toutes nulles, car, si elles ne l'étaient pas, l'équation (33) exprimerait que (S) admet un plan directeur.

On voit quel est le rôle de la fonction arbitraire A. Celui de B est, au contraire, de fixer la nature des lignes planes (α). Mais, on ne peut indiquer, d'une manière géométrique simple, quel est le degré de généralité qui subsiste dans le choix de ces lignes quand on s'est donné la développable enveloppe de leurs plans, c'est-à-dire la fonction A. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est qu'il est permis de choisir arbitrairement l'une d'elles; la fonction B est alors déterminée par une équation différentielle du premier ordre, de sorte qu'il semble exister encore une constante arbitraire dans la solution. Sans vouloir approfondir cette question, qui ne présente d'ailleurs pas un bien grand intérêt, nous ferons seulement l'observation sui-

vante : *Si une ligne* (α) *particulière est une droite, les autres sont aussi des droites et la surface* (S_1) ***est développable.***

En effet, si l'on écrit que x_1, y_1, z_1 satisfont aux équations des projections de la droite sur les plans de coordonnées, on obtient des relations de la forme

$$(34)\quad m_1\left(B' - \frac{2B}{\alpha-\beta}\right) + m_2\frac{B'}{\alpha+\beta} + \frac{m_3}{\alpha+\beta} + m_4 = 0,$$

où les m_i sont des constantes, les deux premières n'étant pas nulles pour l'une au moins des projections. Cette équation linéaire s'intègre aisément et donne pour B un trinome du second degré en β, lequel peut être réduit à zéro, quitte à changer A (n° 4). Or, *si l'on fait* $B = 0$ dans les équations (E), on reconnaît sans peine qu'on obtient une surface développable dont l'arête de rebroussement a pour équations

$$x = u + \frac{A'}{A}(aA' - a'A), \qquad y = v + \frac{A'}{A}(bA' - b'A),$$
$$z = w + \frac{A'}{A}(cA' - c'A).$$

On pourrait déduire de là une solution du problème de la déformation infiniment petite des surfaces développables, pour lesquelles la méthode des formules de M. Lelieuvre est en défaut. Mais, nous ne pouvons le faire ici, d'autant plus qu'on peut résoudre directement la question en partant de la déformation finie.

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

M. **E.-N. Barisien**. — *Propriété des podaires.* — Je vous signale la propriété suivante, qui est peut-être nouvelle. On

sait qu'une courbe fermée ou une courbe avec asymptoles à distance finie a la propriété d'avoir comme podaires des courbes fermées.

Le lieu des points dont les podaires par rapport à une de ces courbes ont une aire donnée, est une ellipse.

Dans le cas de la courbe à centre, le lieu devient un cercle concentrique à la courbe. Ce cas particulier découle d'un théorème connu, dû à Steiner.

Soit O le centre d'une courbe et P un point de son plan. Si S est l'aire de la podaire relative au centre O, et U l'aire de la podaire relative au point P, on a

$$U = S + \pi \frac{\overline{OP}^2}{2}.$$

La condition U = constante, entraîne OP = constante.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2162.

(1910, p. 432.)

Soient ABCD *un tétraèdre régulier*, E *le milieu de* BC, F *le milieu de* DA ; *on mène dans le plan* EDA *deux droites* EH *et* EK, *faisant avec* EF *des angles de* 30°.

Si l'on projette en P, Q, R, S, *un point* M *de l'une de ces droites sur les plans des faces du tétraèdre, la sphère* PQRS *est tangente à la sphère inscrite.*

Si M *est sur* EH, *le point inverse* M' (*qui a même sphère pédale*) *est sur* EK. *L'enveloppe de la droite* MM' *est une ellipse tangente aux droites* EH *et* EK *aux points* H *et* K *et dont le cercle principal est tangent aux droites* ED *et* EA *en* D *et* A, *le point* F *est foyer.*

Le lieu du centre de la sphère pédale est une hyperbole ayant même axe focal que l'ellipse précédente et dont les asymptotes sont parallèles aux droites EH *et* EK ; *le milieu* O *de* EF *est un foyer.*

Sondat.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit a la longueur de l'arête du tétraèdre donné, nous avons

$$EA = ED = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad DA = a;$$

si l'on pose

$$\widehat{FEA} = \theta,$$

on a

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

posons

$$EM = l, \qquad EM' = l',$$

les deux droites EM, EM' devant être évidemment deux droites inverses du triangle DEA. On a

$$PM = l\sin(\theta - 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$MQ = l\sin(\theta + 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

de même

$$P'M' = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2}),$$

$$Q'M' = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

d'où

$$PM + QM = l, \qquad P'M' + Q'M' = l';$$

or

$$PM + QM - RM + SM = P'M' + Q'M' - R'M' - S'M' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

comme

$$RM = SM, \qquad R'M' = S'M',$$

$$RM = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l\right), \qquad R'M' = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l'\right),$$

on a aussi

$$RM.R'M' = PM.P'M';$$

d'où

$$(1) \qquad 2ll' - (l + l')a\sqrt{6} + 2a^2 = 0.$$

On a, d'autre part, en désignant par I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre, $EI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ et

$$\overline{IM}^2 = l^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al\sqrt{6}}{4}, \qquad \overline{IM'}^2 = l'^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al'\sqrt{6}}{4},$$

le centre ω de la sphère pédale est le milieu de MM' et

$$\overline{MM'}^2 = l^2 + l'^2 - ll',$$

comme

$$2\overline{I\omega}^2 + \frac{\overline{MM'}^2}{2} = \overline{IM}^2 + \overline{IM'}^2,$$

$$\overline{I\omega}^2 = \frac{2(l^2 + l'^2) - a^2}{8},$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$\overline{I\omega}^2 = \frac{a^2 - 2ll'}{2a\sqrt{6}},$$

soit ρ le rayon de la sphère pédale

$$\rho^2 = \frac{\overline{MM'}^2}{4} + PM.P'M' = \frac{3(l^2 + l'^2) - 2ll'}{12}$$

ou

$$\rho = \frac{a^2 - ll'}{a\sqrt{6}},$$

comme le rayon r de la sphère inscrite est égal à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$, on voit que

$$I\omega = \rho - r,$$

la sphère pédale est donc tangente à la sphère inscrite.

La relation (1) montre que les points M et M' se correspondent homographiquement sur EH et EK et que lorsque M vient en E,

$$l = 0, \qquad l' = \frac{2a}{\sqrt{6}} = EK,$$

MM' enveloppe donc une conique tangente à EH et EK en H et K, son centre sera le point O_1 tel que

$$EO_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} \cos 30°,$$

l_1 et l_2 étant racines de l'équation

$$l^2 - al\sqrt{6} - a^2 = 0. \qquad EO_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

la longueur de l'axe situé sur EF sera

$$(l_1 - l_2) \cos 30° = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

La perpendiculaire en D à DE passe par O, et l'on a

$$DO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

ce qui montre que les droites DE, AE sont tangentes au cercle principal de la conique considérée en D et A. La perpendiculaire en H à EH coupe EF en H' et l'on a

$$EH' = \frac{2a\sqrt{2}}{3};$$

d'où

$$O_1H' . O_1E = \frac{a^2}{8} = \overline{O_1F}^2,$$

le point F est un foyer de la conique.

Le centre de la sphère pédale est le milieu de MM', il est à l'intersection des parallèles à EH et EK menées par les milieux μ et μ' de EM et EM', ces droites se correspondent homographiquement et le centre de la sphère pédale décrit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à EH et EK et ayant visiblement mêmes sommets situés sur EF que l'ellipse enveloppe de MM'.

Les foyers F_1 et F_2 seront tels que

$$O_1F_1 = O_1F_2 = DO_1 \frac{1}{\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

d'où

$$EF_1 = EO_1 - O_1F_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

F_1 est donc le milieu de EF.

Remarque. — Une étude plus complète de la question montre que les cercles sections de la sphère pédale par le plan EDA sont orthogonaux à un cercle fixe bitangent à l'hyperbole, lieu du centre de la sphère pédale, ils enveloppent par conséquent deux cercles dont l'un est la section par le plan EDA de la sphère inscrite.

Autre solution par M. KLUG.

QUESTIONS.

2192. Déterminer un cône dont un plan cyclique est perpendiculaire à une génératrice et à la fois une ligne focale perpendiculaire à un plan tangent. (KLUG.)

2193. Si les trois droites c', a' et b' sont partagées par les droites a, c, b; b, a, c et c, b, a de l'espace dans les rapports $\alpha:\beta$, $\beta:\gamma$ et $\gamma:\alpha$: les trois droites c, a et b sont de même partagées par les droites a', c', b'; b', a', c' et c', b', a dans les mêmes rapports. (L. KLUG.)

2194. On considère les hyperboles équilatères qui passent par les sommets de grand axe d'une ellipse donnée, et qui sont tangents en un point variable de cette ellipse. Le lieu du centre de ces hyperboles est une quartique, podaire de centre d'ellipse. (Dr W. GAEDECKE.)

2195. La tangente en un point variable de l'ellipse de Frégier d'une ellipse donnée, rencontre cette ellipse en A et B. L'aire des segments elliptiques limités par la corde AB est constante. (Dr W. GAEDECKE.)

[O4g]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES;

Par M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

(*Suite et fin.*)

8. *Étude des douze surfaces.* — Nous allons chercher maintenant si l'on peut obtenir des résultats intéressants en appliquant au cas actuel la théorie des douze surfaces, que M. Darboux a rattachée au problème général de la déformation infiniment petite (*Théorie des surfaces*, t. IV, p. 48 et suiv.).

Nous avons d'abord la surface (A) définie par les équations

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\theta_1}{\omega} = \frac{2a - a'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)},\\ y' &= \frac{\theta_2}{\omega} = \frac{2b - b'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)},\\ z' &= \frac{\theta_3}{\omega} = \frac{2c - c'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}.\end{aligned}\right.$$

Les lignes (α) *de cette surface sont planes* et dans les plans (π) menés par o perpendiculairement aux génératrices (α) de (S). *Si une d'elles est rectiligne, il en est de même de toutes les autres et la surface* (A) *est développable.* En effet, si l'on écrit que x', y', z' vérifient les équations des projections d'une droite sur les plans de coordonnées, on obtient des relations de la forme

$$B'(\alpha+\beta) - 2B + m\beta + n = 0 \qquad (m, n = \text{const.}).$$

Or, cette équation, intégrée par rapport à B, donne un trinome du second degré en β, qui peut être réduit à zéro (n° 4). Mais alors, il est aisé de vérifier que (A) est une surface développable dont l'arête de rebroussement a pour équations

$$x = -\frac{a}{A}, \qquad y = -\frac{b}{A}, \qquad z = -\frac{c}{A}.$$

Passons maintenant à la surface (Σ), dont le point P homologue du point M de (S) a pour coordonnées

$$X = x + y' z_1 - z' y_1, \qquad Y = y + z' x_1 - x' z_1,$$
$$Z = z + x' y_1 - y' x_1.$$

Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$= \int (b'c'' - c'b'')\, d\alpha, \qquad \eta = \int (c'a'' - a'c'')\, d\alpha,$$
$$\zeta = \int (a'b'' - b'a'')\, d\alpha,$$

on a, par exemple,

$$(36) \quad X = \xi + \frac{2B'(cb' - bc') + 2(bw - cv) + (\alpha + \beta)(c'v - b'w)}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)},$$

Y et Z s'en déduisant par permutations circulaires.

On sait que la surface (Σ) est rapportée à ses lignes asymptotiques et qu'elle correspond à (A) avec orthogonalité des éléments. *Pour* $B = 0$, *elle est visiblement réglée.*

Si la développable Δ (n° 7) *est un cône de sommet* O, on peut prendre $A = u = v = w = 0$. Alors X se réduit à

$$X = \xi + \frac{2(cb' - bc')}{\alpha + \beta - \frac{2B}{B'}}.$$

Donc le point P coïncide avec le point M' de (S)

dont les coordonnées (α', β') sont $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta - \frac{2B}{B'}$. Par suite, (Σ) *coïncide avec* (S). Voilà *deux cas où la surface* (Σ) *est réglée; montrons qu'il n'y en a pas d'autres*, en supposant du moins que ses génératrices rectilignes sont les lignes (α).

En effet, supposons d'abord *qu'une ligne* α *particulière soit une droite non parallèle à* D. La ligne homologue de (A) se trouve alors dans un plan perpendiculaire à cette droite; comme elle est déjà dans le plan π, perpendiculaire à D, elle est forcément rectiligne et, par suite, *on peut prendre* $B = 0$ *et la surface* (Σ) *est réglée*.

Ce raisonnement est en défaut *si la droite* (α) de (Σ) *est parallèle à* D. Mais, s'il en est ainsi, les deux quantités $S(X - \xi)a$ et $S(X - \xi)a'$ doivent se réduire à des fonctions de α. Or, elles sont égales respectivement à

$$\frac{\alpha + \beta}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)} S u(cb' - bc')$$

et

$$\frac{2 S u(cb' - bc')}{(A' + B')(\alpha + \beta) - 2(A + B)}.$$

Si elles ne sont pas nulles, leur rapport $\alpha + \beta$ ne peut être indépendant de β. On doit donc avoir

$$S u(cb' - bc') = 0.$$

On retombe sur l'équation (33). Elle est, en général, vérifiée pour certaines valeurs particulières de α. Si l'on veut qu'elle le soit, quel que soit α, on est ramené à l'hypothèse où la développable Δ est un cône de sommet O, auquel cas (Σ) *coïncide avec* (S).

9. *Congruences* (G). — Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des douze surfaces, car elle ne nous a

pas semblé devoir donner de résultats bien intéressants. Par contre, nous allons nous occuper spécialement de la surface (Σ) dans le cas où elle est réglée, B étant nul.

On sait que la droite MP est tangente en M à (S) et en P à (Σ); elle engendre *une congruence dont les deux nappes de la surface focale sont des surfaces réglées, sur lesquelles les génératrices rectilignes se correspondent*. Nous appellerons *congruence* (G) toute congruence jouissant de cette propriété.

Je dis que *toute congruence* (G) *peut être obtenue de la manière précédente*. En effet, soient (S) et (S') les deux nappes de la surface focale d'une telle congruence, et M et M' deux points homologues quelconques. On sait que lorsque MM' engendre successivement les deux familles de développables de la congruence, les points M et M' décrivent respectivement sur (S) et (S') deux réseaux conjugués. D'autre part, par hypothèse, lorsque M décrit une droite D sur (S), M' décrit une droite D' sur (S'). Comme ces droites sont des lignes asymptotiques sur les surfaces qui les portent, on en conclut que les lignes asymptotiques de la seconde famille sont aussi des lignes homologues sur les deux surfaces [1]. Dès lors, on peut

[1] Cela résulte de la propriété générale suivante : *Si l'on établit entre deux surfaces quelconques* (S) *et* (S') *une correspondance ponctuelle transformant deux réseaux particuliers de* (S) *en deux réseaux conjugués de* (S'), *les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces*. En effet, on sait qu'en deux points homologues M et M', les tangentes homologues se correspondent homographiquement. Par suite les tangentes asymptotiques de (S), qui divisent harmoniquement les deux couples de tangentes (Mt, $M\theta$), (Mt_1, $M\theta_1$) aux deux réseaux proposés, ont pour homologues en M' les deux tangentes asymptotiques de (S'), qui divisent harmoniquement les couples ($M't'$, $M'\theta'$), ($M't'_1$, $M'\theta'_1$), homologues des précédents par hypothèse.

appliquer le théorème de M. Guichard [1] et affirmer que la surface (S') peut être déduite comme surface (Σ) de la surface (S). Or, nous avons reconnu tous les cas où (Σ) est une surface réglée dont les droites sont les lignes (α). Le cas de $A = 0$ ne donne rien, car (Σ) se confond avec (S); la congruence se réduit aux génératrices de (S). Il ne nous reste donc que le cas où $B = 0$, ce que nous voulions démontrer.

Finalement, *nous aurons la congruence* (G) *la plus générale en joignant les points* M *et* P *dont les coordonnées sont données par les formules* (D) *et* (36), *où l'on suppose* $B = 0$. On pourra même l'obtenir sans aucune quadrature, puisqu'on peut se débarrasser de celles qui figurent dans ξ, η, ζ, u, v, w (n° 2).

10. Posons maintenant le problème d'une manière un peu différente et plus symétrique. *Donnons-nous deux surfaces réglées sous la forme* (D). Nous aurons, par exemple, la surface (S) définie par les fonctions a, b, c de α; puis la surface (S_1) [2] définie par trois fonctions a_1, b_1, c_1 de α_1 au moyen des formules telles que la suivante :

$$(D_1) \qquad x_1 = \frac{2(c_1 b'_1 - b_1 c'_1)}{\alpha_1 + \beta_1} + \xi_1,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = \int (b'_1 c''_1 - c'_1 b''_1)\, d\alpha_1,$$

et où les accents indiquent des dérivées prises par rapport à α_1.

---

[1] *Cf.* G. Darboux, *loc. cit.*, n° 888.

[2] Bien entendu, cette surface n'a rien à voir avec la surface (S_1) des numéros précédents. Il en est de même de toutes les notations qui vont suivre.

Ceci étant, cherchons *quelles relations il faut établir entre α et α_1, d'une part, et entre β et β_1, d'autre part, et quelles conditions doivent remplir les fonctions a, b, c, a_1, b_1, c_1 pour que la droite* MM_1 *engendre une congruence* (G) *de surfaces focales* (S) *et* (S_1).

On pourrait répondre à cette question en s'appuyant sur le numéro précédent et identifiant la surface (S_1) avec la surface (Σ). Nous préférons employer la méthode directe suivante. Écrivons que MM_1 est tangente en M à (S) et en M_1 à (S_1); nous avons, en nous rappelant les cosinus directeurs de la normale en M à (S) (n° 6),

$$(37)\quad S\left(a' - \frac{2a}{\alpha+\beta}\right)\left(\xi_1 - \xi + \frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1} - \frac{2A}{\alpha+\beta}\right) = 0,$$

$$(38)\quad S\left(a'_1 - \frac{2a_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)\left(\xi - \xi_1 + \frac{2A}{\alpha+\beta} - \frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1}\right) = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$A = cb' - bc', \qquad A_1 = c_1 b'_1 - b_1 c'_1.$$

L'équation (37), par exemple, est de la forme

$$(39)\quad \frac{m}{(\alpha+\beta)(\alpha_1+\beta_1)} + \frac{n}{\alpha+\beta} + \frac{p}{\alpha_1+\beta_1} + q = 0$$

avec

$$(40)\quad \begin{cases} m = -4 S a A_1 & n = -2 S a(\xi_1 - \xi), \\ p = 2 S a' A_1, & q = S a'(\xi_1 - \xi). \end{cases}$$

Si l'on y donne à α une valeur numérique quelconque, on obtient entre β et β_1 une relation homographique. En négligeant les transformations (14), (15), (16) effectuées, par exemple, sur (S), on peut supposer $\beta_1 = \beta$. Portant cette hypothèse dans (39), on a

$$(41)\quad q = 0, \qquad n + p = 0, \qquad m + n\alpha_1 + p\alpha = 0.$$

En portant dans (38), on aurait de même

$$(42)\quad q_1 = 0, \qquad n_1 + p_1 = 0, \qquad m_1 + n_1\alpha + p_1\alpha_1 = 0,$$

en appelant m_1, n_1, p_1, q_1 les quantités déduites de m, n, p, q par l'échange des lettres a, b, c et a_1, b_1, c_1.

Les équations $q = 0$, $q_1 = 0$ nous donnent d'abord

$$(43)\quad \begin{cases} \xi_1 - \xi = \rho(c'b'_1 - b'c'_1), \\ \eta_1 - \eta = \rho(a'c'_1 - c'a'_1), \\ \zeta_1 - \zeta = \rho(b'a'_1 - a'b'_1), \end{cases}$$

en appelant ρ un certain facteur de proportionnalité [1]. En portant ces valeurs dans n et n_1, on obtient

$$n = -\rho p_1, \qquad n_1 = -\rho p.$$

La deuxième équation (42) s'écrit alors

$$\rho^2 p + n = 0;$$

en la comparant avec la dernière équation (41) et remarquant que n et p ne peuvent être tous deux nuls, sans quoi m le serait aussi et D et D_1 seraient parallèles, on obtient $\rho^2 = 1$. Négligeant un changement de signe sur a, b, c, prenons $\rho = 1$. Nous n'avons plus maintenant que les trois équations suivantes à vérifier :

$$(44)\quad p = p_1, \qquad m + p(\alpha - \alpha_1) = 0, \qquad m_1 + p_1(\alpha_1 - \alpha) = 0.$$

La deuxième s'écrit

$$S[a'(\alpha - \alpha_1) - 2a]A_1 = 0,$$

---

[1] Ceci suppose toutefois qu'on n'a pas $\frac{a'_1}{a'} = \frac{b'_1}{b'} = \frac{c'_1}{c'}$. Mais s'il en était ainsi, on aurait manifestement $p = 0$; d'où $n = 0$, $m = 0$. Or, de $p = m = 0$, on déduirait $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$; les génératrices D et D_1 seraient parallèles et, par suite, confondues (n° 8), ce qui donnerait une solution absurde.

comme on a, en outre, identiquement

$$S[a'(\alpha - \alpha_1) - 2a]A = 0$$

et que les mineurs $u = BC_1 - CB_1$, $v = CA_1 - AC_1$, $w = AB_1 - BA_1$ ne sont pas tous nuls, on en conclut

$$a'(\alpha - \alpha_1) - 2a = \lambda u, \qquad b'(\alpha - \alpha_1) - 2b = \lambda v,$$
$$c'(\alpha - \alpha_1) - 2c = \lambda w.$$

De même

$$a'_1(\alpha_1 - \alpha) - 2a_1 = \lambda_1 u, \qquad b'_1(\alpha_1 - \alpha) - 2b_1 = \lambda_1 v,$$
$$c'_1(\alpha_1 - \alpha) - 2c_1 = \lambda_1 w.$$

On tire de là

$$2A = \lambda(c'v - b'w), \qquad 2A_1 = \lambda_1(c'_1 v - b'_1 w);$$
$$p = \lambda_1 S a'(c'_1 v - b'_1 w) = \lambda_1 S u(c' b'_1 - b' c'_1),$$
$$p_1 = \lambda\ S a'_1(c' v - b' w) = \lambda\ S u(c'_1 b' - b'_1 c').$$

La condition $p = p_1$ nous donne alors $\lambda_1 = -\lambda$, car nous avons vu que p et p_1 ne pouvaient être nuls. Nous avons donc

$$a'(\alpha - \alpha_1) - 2a = a'_1(\alpha - \alpha_1) + 2a_1$$

et les deux équations analogues. Ces trois égalités entraînent d'ailleurs visiblement les trois équations (44).

En résumé, *les conditions cherchées sont*

$$(\alpha - \alpha_1)(a' - a'_1) = 2(a + a_1), \tag{45}$$
$$\xi_1 - \xi = c'b'_1 - b'c'_1, \tag{46}$$

et celles qui s'en déduisent par permutations circulaires. Les équations telles que (46) *ne servent d'ailleurs qu'à fixer les constantes d'intégration relatives à* ξ_1, η_1, ζ_1 quand on a choisi celles qui s'in-

troduisent dans ξ, η, ζ. Je dis, en effet, que si l'on différentie (46), on obtient une conséquence des équations telles que (45). Effectivement, l'équation (46) différentiée peut s'écrire

$$(47)\quad (c''_1\, d\alpha_1 - c''\, d\alpha)(b' + b'_1) - (b''_1\, d\alpha_1 - b''\, d\alpha)(c' + c'_1) = 0.$$

Or, en différentiant (45), on obtient

$$(48)\quad (\alpha - \alpha_1)(a''_1\, d\alpha_1 - a''\, d\alpha) = -(d\alpha + d\alpha_1)(a' + a'_1);$$

et l'on voit bien que (47) est une conséquence des équations telles que (48).

On aperçoit facilement quel est le degré de généralité de la solution. On peut choisir arbitrairement a, b, c, c'est-à-dire (S), puis la relation entre α_1 et α. La fonction a_1 est alors donnée par l'équation différentielle linéaire (45), et les fonctions b_1 et c_1 par les équations analogues. Quant à la correspondance entre M et M_1, elle est fixée sur deux génératrices homologues par l'égalité $\beta = \beta_1$.

Rappelons, à ce propos, que *pour avoir les conditions demandées sous leur forme la plus générale*, il aurait fallu identifier les équations (37) et (38) avec une *relation homographique quelconque entre* β *et* β_1, soit

$$(49)\qquad m\beta\beta_1 + n\beta + p\beta_1 + q = 0.$$

On aurait eu des calculs beaucoup plus compliqués, qu'on peut éviter en faisant, après coup, sur la surface (S), par exemple, les changements de variables (n° 3)

$$\beta \left| \frac{n\beta + q}{-m\beta - p}, \quad \alpha \right| \frac{n\alpha - q}{m\alpha - p}, \quad a \left| \frac{a(mq - np)}{(m\alpha - p)^2}. \right.$$

Les équations (45) et (46) deviennent alors ([1])

$$(50)\qquad (m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q)(a' - a'_1) = 2[m(a\alpha_1 - a_1\alpha) + pa_1 - na],$$

$$(51)\qquad \xi_1 - \xi = c'b'_1 - b'c'_1 + \frac{4m(bc_1 - cb_1)}{m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q}.$$

On peut enfin, dans ces équations, changer les signes de a, b, c, ou de a_1, b_1, c_1.

11. *Enveloppes de quadriques.* — Les surfaces (S) et (S_1) étant supposées satisfaire aux conditions (45) et (46), cherchons le lieu de la droite MM_1 quand β seul varie. La correspondance entre M et M_1 étant homographique, ce lieu est une quadrique. C'est ce que vérifie un calcul élémentaire. Pour avoir les équations de la droite MM_1, il suffit de prendre celles des plans tangents en M à (S) et en M_1 à (S_1), ce qui donne de suite

$$(52)\qquad 2P - Q(\alpha + \beta) = 0, \qquad 2P_1 - Q_1(\alpha_1 + \beta) = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$P_1 = Sa_1(x - \xi_1), \qquad Q_1 = Sa'_1(x - \xi_1).$$
$$P = Sa(x - \xi), \qquad Q = Sa'(x - \xi).$$

([1]) Pour faire rapidement le calcul de (51), il convient de remarquer que, si l'on affecte de l'indice zéro les anciennes variables, on a identiquement

$$\xi_0 + \frac{2(c_0 b'_0 - b_0 c'_0)}{\alpha_0 + \beta_0} = \xi + \frac{2(cb' - bc')}{\alpha + \beta},$$

puisque la surface (S) ne change pas. Dès lors, on aura ξ_0 en faisant $\beta_0 = \infty$, donc $\beta = -\frac{p}{m}$. En portant dans (46), c'est-à-dire

$$\xi_1 - \xi_0 = c'_0 b'_1 - c'_0 b'_1,$$

et tenant compte de (50), on obtient (51).

Éliminant β, nous avons l'équation du lieu

$$(53) \qquad 2(PQ_1 - QP_1) + (\alpha_1 - \alpha)QQ_1 = 0,$$

ce qui représente bien une quadrique (Q).

Lorsque α varie, *cette quadrique touche constamment son enveloppe suivant les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.* En effet, la courbe de contact comprend déjà les deux droites D et D_1, qui sont des génératrices de même système de la quadrique. Comme cette courbe est l'intersection de (Q) avec une autre surface du second degré [par exemple la surface (Q) infiniment voisine], elle est nécessairement constituée par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche (Ω), dont D et D_1 sont deux côtés opposés.

L'équation (53) *définit la famille de quadriques la plus générale jouissant de la propriété précédente ;* car si l'on possède une telle famille, les génératrices de chaque système de la quadrique variable engendrent une congruence (G), laquelle peut être obtenue par le procédé ci-dessus (n° 9).

Nous connaissons deux côtés D et D_1 du quadrilatère (Ω). Je dis que *les deux autres côtés sont des tangentes asymptotiques communes à* (S) *et à* (S_1). On pourrait démontrer cette propriété analytiquement, en différentiant l'équation (53), de manière à avoir la caractéristique de la quadrique (Q). Mais les calculs sont assez longs et nous nous bornerons à indiquer la démonstration géométrique suivante.

Soit (H) l'hyperboloïde osculateur à (S) le long de (D) ; il est engendré, comme on sait, par les tangentes asymptotiques de (S) aux différents points de (D). Les quadriques (Q) et (H) se raccordent le long de (D) ; elles ont donc en commun deux génératrices (d) et (d_1) du système auquel n'appartient pas

(D). Soit (s) la surface engendrée par (d), par exemple. Nous allons montrer que (Q) se raccorde à (s) le long de (d). En effet, tout plan (Π) passant par (d) touche (Q), (s), (H) en trois points m, m', m'', qui se correspondent deux à deux homographiquement. Les points doubles de l'homographie (m', m'') sont confondus en M, car ce sont les points focaux de la droite (d), considérée comme appartenant à la congruence des tangentes asymptotiques de (S), puisque les surfaces (s) et (H) sont engendrées toutes deux par des droites de cette congruence [1]. Les points doubles de l'homographie (m, m'') sont également confondus en M, parce que les points de raccordement de (Q) et (H) relatifs à (d) sont eux-mêmes confondus en M. Il suit de là qu'on a deux relations de la forme

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{M}m'}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{M}m''}} = k, \quad \frac{1}{\overline{\mathrm{M}m}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{M}m''}} = k' \quad (k, k' = \text{const.}),$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{M}m}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{M}m'}} = k' - k = k''.$$

Or, la droite (d) appartient constamment à la congruence (G) et, par suite, (s) est tangente en M_1 à (S_1). Comme il en est de même de (Q), on voit que M_1 est à lui-même son homologue dans l'homographie (m, m'). Ceci prouve que k'' est nul et, par conséquent, que m' coïncide toujours avec m. Autrement dit, (Q) et (s) se raccordent le long de (d).

On prouverait de même que Q se raccorde le long

---

[1] Rappelons au lecteur que lorsque deux surfaces réglées ayant une génératrice (d) commune sont engendrées par des droites appartenant à une même congruence, leurs points de raccordement sur (d) sont les points focaux de cette droite.

de (d_1) à la surface (s_1) engendrée par cette droite. Finalement, *le quadrilatère* (Ω) *est bien constitué par les droites* (D), (D_1), (d) et (d_1) et l'on peut dire que *la surface réglée engendrée par chaque côté admet pour tangentes asymptotiques les deux côtés qui le rencontrent*, car les quatre côtés jouent évidemment le même rôle dans la question.

Réciproquement, *tout quadrilatère variable jouissant de cette propriété peut être obtenu de la manière précédente.*

En effet, imaginons que (Ω) soit un tel quadrilatère et considérons la quadrique (Q) tangente à (S) le long de (D) et passant par (D_1). Elle contient évidemment (d) et (d_1). De plus, le raisonnement fait plus haut s'applique sans aucune modification, car les surfaces (Q) et (s) admettent même plan tangent en M_1, à savoir le plan dM_1D_1. Donc, elles se raccordent le long de (d). De même (Q) est tangente à (s_1) le long de (d_1). Si maintenant l'on fait jouer à (d) et (d_1) les rôles de (D) et (D_1) et *vice versa*, on peut affirmer aussi que (Q) se raccorde à (S_1) suivant (D_1). Finalement, *le quadrilatère* (Ω) *est, à chaque instant, la courbe de contact de la quadrique* (G) *avec son enveloppe* et notre réciproque est démontrée [1].

12. Les considérations géométriques qui précèdent

---

[1] *On peut supposer seulement que les côtés opposés* (d) *et* (d_1) *sont tangentes asymptotiques de* (S) *et* (S_1). Il en résulte nécessairement que (D) et (D_1) sont tangentes asymptotiques de (s) et (s_1). En effet, (S) et (s) se raccordent tout le long de la courbe (Γ) lieu de M. Donc, la tangente en M à (Γ) a même conjuguée relativement à ces deux surfaces. En outre, (d) est tangente asymptotique à la fois pour (S) et (s). La deuxième tangente asymptotique est donc aussi la même pour les deux surfaces. Or, c'est (D) pour (S); donc aussi pour (s). On prouverait de même que (D) est tangente asymptotique de (s_1) et que (D_1) l'est pour (s) et (s_1).

nous permettent d'exposer maintenant *une nouvelle méthode de détermination des congruences* (G), ou, ce qui revient au même, des familles de quadriques (Q). Partant de la surface (S) donnée par les équations (D), nous allons former une quadrique (Q) se raccordant à (S) le long de (D) et contenant deux tangentes asymptotiques (d) et (d_1). Puis, nous écrirons que cette quadrique touche son enveloppe suivant ces deux droites.

Les équations de (D) sont

$$(54) \qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Cherchons les équations de la tangente asymptotique (d) au point M de paramètre β. Nous avons d'abord l'équation (52) du plan tangent. Nous remarquons ensuite que les cosinus directeurs de (d) sont proportionnels aux quantités telles que

$$b'c'' - c'b'' + \frac{2(cb'' - bc'')}{\alpha + \beta} - \frac{2(cb' - bc')}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Il est dès lors facile de vérifier que (d) est perpendiculaire à la direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à

$$a' - (\alpha + \beta)a'', \quad b' - (\alpha + \beta)b'', \quad c' - (\alpha + \beta)c''.$$

De là résulte l'équation d'un second plan contenant (d), à savoir

$$Q - 2\delta - R(\alpha + \beta) = 0,$$

en posant

$$R = S a''(x - \xi).$$

Les équations de (d) sont donc

$$(55) \qquad \begin{cases} P - mQ = 0 \\ Q - 2\delta - 2mR = 0 \end{cases} \qquad \left(m = \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

De même, celles de (d_1) sont de la forme

$$(56)\qquad \begin{cases} P - nQ = 0, \\ Q - 2\delta - 2nR = 0. \end{cases}$$

Pour former la quadrique (Q), nous remarquons qu'elle fait partie du faisceau ponctuel déterminé par l'hyperboloïde osculateur (H) et par le couple de plans $P - mQ = 0$, $P - nQ = 0$. Or, l'équation de (H) s'obtient en éliminant m entre les équations (55), ce qui donne

$$(57)\qquad H \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) = 0.$$

L'équation de (Q) est donc de la forme

$$(58)\quad S \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) + t(P - mQ)(P - nQ) = 0.$$

Il faut à présent supposer que t, m, n sont trois fonctions de α et chercher la caractéristique de (Q). Dérivons donc (58) par rapport à α; il vient, en remarquant les identités

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = Q - \delta,\quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = R,\quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\lambda R - \mu Q - \nu P,\quad \frac{d\delta}{d\alpha} = -\lambda\delta,$$

dont les deux dernières sont obtenues en tenant compte de (18),

$$\begin{aligned}(59)\quad T \equiv & -2P(\lambda R + \mu Q + \nu P) \\ & - 2Q\lambda\delta + t'(P - mQ)(P - nQ) \\ & + t(P - mQ)(Q - \delta - nR - n'Q) \\ & + t(P - nQ)(Q - \delta - mR - m'Q) = 0.\end{aligned}$$

Il nous faut exprimer que la quadrique représentée par cette équation coupe (Q) suivant quatre droites, dont (D), (d) et (d_1). Elle passe déjà par (D). Si (d) et (d_1) sont distinctes, il suffit d'exprimer qu'elles vérifient identiquement (59); on est alors conduit très

rapidement aux relations qui doivent exister entre t, m, n. Mais cette méthode est en défaut lorsque (d) et (d_1) viennent se confondre et, en outre, elle offre l'inconvénient de ne pas donner le quatrième côté (D_1) du quadrilatère (Ω). Aussi allons-nous suivre une autre marche.

Exprimons que la quadrique (59) fait partie du faisceau déterminé par (Q) et les deux plans (D, d), (D_1, d_1), lesquels ont pour équations respectives

$$P - mQ = 0, \qquad g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0,$$

g et h désignant deux coefficients non déterminés. Nous devons avoir une identité de la forme

$$T \equiv kS + (P - mQ)[g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)]$$

ou

$$T \equiv kH + (P - mQ)[l(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)],$$

en posant $l = g + tk$. Ceci doit avoir lieu quels que soient P, Q, R. Le calcul d'identification n'offre aucune difficulté et donne les résultats suivants :

$$(60) \quad l = t' - 2\nu, \qquad h = t, \qquad k = -\lambda + \frac{t(n-m)}{2},$$

$$(61) \qquad t\left(mn' + nm' - \frac{m+n}{2}\right) = \lambda - 2\nu mn,$$

$$(62) \qquad t(1 - m' - n') = 2\mu + 2\nu(m+n).$$

Les équations (61) *et* (62) *sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique* (Q) *touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche.* On peut les mettre sous une autre forme, en éliminant successivement entre elles m' et n', ce qui se fait par les combinaisons linéaires $(61) + n(62)$

et (61) + m(62); on obtient ainsi

$$(63)\qquad t(m-n)(1-2m') = 2(\lambda + 2\mu m + 2\nu m^2),$$
$$(64)\qquad t(n-m)(1-2n') = 2(\lambda + 2\mu n + 2\nu n^2).$$

Ce sont ces équations qu'on aurait obtenues par la méthode à laquelle il a été fait allusion tout à l'heure. Mais *elles ne forment un système équivalent à celui des équations* (61), (62) *que si* $m \neq n$.

Les côtés (D), (d) et (d_1) du quadrilatère (Ω) ont respectivement pour équations les équations (54), (55), (56). Quant au côté (D_1), il sera obtenu en coupant la quadrique (Q) par le plan

$$g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0;$$

on trouve facilement qu'on peut prendre pour équations de (D_1)

$$(65)\quad \begin{cases} P\left[t' - 2\nu + t\lambda + \dfrac{t^2}{2}(m+n)\right] + tQ(1 - tmn) - 2t\delta = 0, \\ Pt^2 + Q\left[t' - 2\nu - t\lambda - \dfrac{t^2}{2}(m-n)\right] - 2tR = 0. \end{cases}$$

En éliminant t entre les équations (63) et (64) on voit qu'*on peut choisir arbitrairement la famille des droites* (d), *pourvu qu'elles soient tangentes asymptotiques de* (s), *les droites* (d_1) *étant alors déterminées par une équation de Riccati.*

13. Nous terminerons en examinant quelques cas particuliers intéressants obtenus en assujettissant le quadrilatère (Ω) à certaines conditions déterminées.

Exigeons, par exemple, *que* (Ω) *ait deux côtés confondus*. Ces côtés ne peuvent évidemment être que des côtés opposés.

Si ces côtés sont (D) et (D_1), les équations (65)

doivent être équivalentes aux équations (54); ce qui se traduit par la condition nécessaire et suffisante $t = 0$. Dans ce cas, *la quadrique* (Q) *est donc l'hyperboloïde osculateur à* (S). Les équations (63), (64) nous montrent que m et n sont alors les racines de l'équation du second degré

$$\lambda + 2\mu m + \nu m^2 = 0. \tag{66}$$

On peut dire aussi que les β des deux sommets doubles de (Ω) sont donnés par

$$2\lambda + 2\mu(\alpha + \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0.$$

Dans le cas où cette équation admet une racine constante, on retrouve la condition (21) pour que (S) admette une directrice rectiligne. Pour que les deux autres côtés (d) et (d_1) soient aussi confondus, c'est-à-dire *pour que l'hyperboloïde osculateur à* (S) *soit en même temps osculateur à une autre surface réglée* (s), *il faut et suffit qu'on ait*

$$\mu^2 - 2\lambda\nu = 0.$$

Si les deux côtés (d) et (d_1) sont seuls confondus, on a $m = n$. Les équations (63), (64) se réduisent alors à (66). Quant à t, il est donné par exemple par (62). Réciproquement, si m satisfait à (66), on a, soit $t = 0$, soit $m = n$, en laissant de côté le cas où $m' = \frac{1}{2}$, qui donnerait $\beta =$ const. et conduirait à une droite (d) fixe et située sur (S).

Les tangentes asymptotiques (d') *et* (d'_1) *qui vérifient l'équation* (66) *sont caractérisées par la propriété d'avoir avec la surface un contact du troisième ordre.* On peut, en effet, les considérer comme situées sur deux hyperboloïdes osculateurs consécutifs

(H) et (H′). Or (H) contient trois génératrices consécutives 1, 2, 3 de (S); (H′) contient de même trois génératrices consécutives 2, 3, 4. Donc (d') et (d'_1) rencontrent les quatre génératrices consécutives 1, 2, 3, 4 et possèdent bien un contact du troisième ordre avec (S) [1]. Appelons-les *tangentes hyperasymptotiques* et appelons *surfaces hyperasymptotiques* de (S) les deux surfaces réglées (s') et (s'_1) qu'elles engendrent. Les remarques faites plus haut nous permettent alors d'énoncer la proposition suivante :

Si une surface réglée (s') *est hyperasymptotique pour une autre surface réglée* (S), *inversement* (S) *est hyperasymptotique pour* (s').

On peut affirmer également que *si une quadrique variable* (Q) *touche constamment son enveloppe suivant un quadrilatère gauche dont deux côtés consécutifs sont l'un pour l'autre des tangentes hyperasymptotiques, un troisième côté se confond nécessairement avec l'un des précédents.*

Pendant qu'il est question de l'hyperboloïde osculateur, nous ferons observer que l'équation (57) se

---

[1] Analytiquement, on peut raisonner comme il suit. Soient x_1, x_2, ..., x_6, les coordonnées de Klein de la droite (D) qui engendre (S) : ce sont des fonctions du paramètre α. La demi-quadrique (H) formée par les tangentes asymptotiques est définie par les trois équations

$$(1) \qquad \Sigma X_i x_i = 0, \qquad \Sigma X_i x'_i = 0, \qquad \Sigma X_i x''_i = 0,$$

où X_1, X_2, ..., X_6 sont les coordonnées kleinéennes courantes. Les deux droites (d') et (d'_1) de (H) qui font partie de la caractéristique sont déterminées par les équations (1) et celles qu'on en déduit en dérivant par rapport à α, ce qui donne seulement la nouvelle équation $\Sigma X_i x'''_i = 0$. Or, ces quatre équations expriment précisément que l'équation aux α des points d'intersection de (S) avec la droite (X_i) admet une racine quadruple, c'est-à-dire qu'il y a contact du troisième ordre.

prête très bien à son étude. C'est ainsi que le centre ω est donné par

$$P = 0, \qquad Q = \delta, \qquad R = 0;$$

d'où l'on tire

$$x - \xi = cb'' - bc'', \quad y - \eta = ac'' - ca'', \quad z - \zeta = ba'' - ab''.$$

Cherchons *les surfaces réglées dont l'hyperboloïde osculateur relatif à chaque génératrice a un sommet sur cette génératrice.*

Il suffit d'écrire que la droite $M\omega$ est perpendiculaire au plan tangent en M. Or, si l'on remarque que, pour le point M, on a $P = 0$, $Q = 0$, $R = \frac{-2\delta}{\alpha + \beta}$, on voit de suite que deux plans passant par $M\omega$ sont les suivants :

$$P = 0, \qquad 2Q - R(\alpha + \beta) - 2\delta = 0.$$

Écrivons qu'ils sont perpendiculaires au plan tangent (52); nous avons, en conservant les notations du n° 6, et remarquant que

$$S aa'' = \rho\rho'' + \rho'^2 - \sigma^2,$$

$$\alpha + \beta = \frac{2\rho}{\rho'},$$

$$4\rho\rho' - 2(\alpha + \beta)(\rho\rho'' + \rho'^2 - \sigma^2)$$
$$- 2(\alpha + \beta)\sigma^2 + (\alpha + \beta)^2\sigma\sigma' = 0.$$

La première équation nous montre que *le sommet en question doit être au point central*, ce qui est d'ailleurs évident géométriquement, car (S) et (H) ont même point central. La seconde devient, en tenant compte de la première,

$$\rho'\rho'' = \sigma\sigma'$$

ou

$$\rho'^2 - \sigma^2 = \text{const.}$$

Donc *les surfaces cherchées sont celles dont le paramètre de distribution est constant.*

En particulier, *si l'hyperboloïde osculateur est constamment de révolution,* on se trouve nécessairement dans le cas précédent. Mais il y a une condition supplémentaire qui est

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = \rho''^2.$$

On peut le voir aisément en formant l'équation en S de l'hyperboloïde; mais nous laisserons au lecteur le soin de le faire et nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet.

14. Revenons au quadrilatère (Ω) pour signaler d'autres cas particuliers.

Exigeons par exemple que *deux côtés soient parallèles.* Ce seront nécessairement deux côtés consécutifs qu'on peut toujours supposer être (D) et (d). Alors (d) sera la tangente asymptotique au point à l'infini de (D). Elle est obtenue en faisant $m = 0$ dans (55). On a ensuite

$$tn = -2\lambda, \tag{67}$$

$$n' = 1 + \frac{\mu}{\lambda} n + \frac{\nu}{\lambda} n^2. \tag{68}$$

Pour que (d) soit tangente hyperasymptotique, il faut et suffit que λ soit nul. Pour que (D_1) se confonde avec (D) et (d_1) avec (d), les droites (d) et (D) demeurant toujours parallèles, il faut et suffit qu'on ait $\lambda = \mu = 0$. Ceci nous donne évidemment la solution du problème suivant : *Trouver deux surfaces réglées* (S) *et* (s) *dont les génératrices soient deux à deux parallèles et telles que l'hyperboloïde osculateur à* (S) *le long d'une génératrice quelconque soit*

osculateur à (s) *le long de la génératrice parallèle.*

Les droites (D) *et* (d) *étant toujours supposées parallèles, cherchons la condition pour que les deux autres côtés* (D_1) *et* (d_1) *le soient également.* En se servant des équations (56) et (65), on trouve l'unique condition

$$n\left(t' - 2\nu + t\lambda - \frac{t^2 n}{2}\right) + t = 0$$

qui devient, en tenant compte de (67),

$$n' = 1 + \frac{\lambda'}{\lambda} n + \frac{\nu}{\lambda} n^2.$$

En comparant avec (68), on voit que *la condition nécessaire et suffisante cherchée est* $\lambda' = \mu$. Si elle est remplie, toutes les quadriques touchant leur enveloppe suivant (D) et une droite parallèle ne peuvent la toucher suivant deux autres droites sans que celles-ci soient également parallèles.

[B1c]

SUR UN DÉTERMINANT CIRCULAIRE;

PAR M. G. STOYANOV.

Catalan a étudié [1] un déterminant circulaire de degré n, composé de deux éléments, -1 et 1, le premier pris p fois. Comme valeur de ce déterminant, il trouve l'expression

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 2^{n-1}(n-2p) \quad (^2),$$

---

[1] *Recherches sur les déterminants* (*Bulletin de l'Académie de Belgique,* t. XIII, 1re Partie, 1846, p. 534-555).

[2] Cette formule est imprimée avec une erreur dans *Die Deter-*

sous la condition $p < \frac{n}{2}$. Nous verrons que cette condition supposée par l'auteur comme nécessaire ne l'est pas, et qu'une autre condition essentielle, sans laquelle la résolution du problème n'est pas complète, a échappé à Catalan.

Nous nous proposons de généraliser le déterminant en question, en considérant le déterminant circulaire suivant :

$$\Delta_p^m = \begin{vmatrix} \overbrace{a\ a\ a\ \ldots\ a}^{p.}\ a & \overbrace{b\ b\ \ldots\ b\ b}^{m.}\ b \\ a\ a\ a\ \ldots\ a\ b & b\ b\ \ldots\ b\ b\ a \\ a\ a\ a\ \ldots\ b\ b & b\ b\ \ldots\ b\ a\ a \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a\ a\ b\ \ldots\ b\ b & b\ b\ \ldots\ a\ a\ a \\ a\ b\ b\ \ldots\ b\ b & b\ b\ \ldots\ a\ a\ a \\ b\ b\ b\ \ldots\ b\ b & b\ a\ \ldots\ a\ a\ a \\ b\ b\ b\ \ldots\ b\ b & a\ a\ \ldots\ a\ a\ b \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ b\ b\ b\ \ldots\ a\ a & a\ a\ \ldots\ b\ b\ b \\ b\ b\ a\ \ldots\ a\ a & a\ a\ \ldots\ b\ b\ b \\ b\ a\ a\ \ldots\ a\ a & a\ b\ \ldots\ b\ b\ b \end{vmatrix},$$

où a et b sont des nombres réels ou imaginaires, et $p + m = n$.

Nous trouverons la valeur de Δ_p^m de deux manières :

1. *Par les propriétés générales des déter-*

---

minanten von E. Pascal. Il y a $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-3)}2^{n-1}(n-2p)$ au lieu de $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}2^{n-1}(n-2p)$.

minants. — Aux éléments de la première colonne, nous additionnons les éléments de toutes les autres colonnes, et mettons devant le déterminant le facteur commun $pa + mb$ des éléments de la première colonne. Après cela, nous soustrayons les éléments de chaque ligne horizontale des éléments respectifs de la ligne située immédiatement au-dessous, en commençant par l'avant-dernière ligne. De cette manière, nous réduisons le déterminant Δ_p^m en un autre, celui du degré $p + m - 1$. Dans chaque ligne horizontale, nous prenons le facteur $a - b$ et enfin, en permutant circulairement les colonnes, nous recevons

$$\Delta_p^m = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(a-b)^{n-1}(pa+mb)\,\mathrm{D}_p^m,$$

où

$$\mathrm{D}_p^m = \begin{array}{c|ccccccccccccc|c}
 & & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{4cm}}^{m-1.}} & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{3cm}}^{p-2.}} & \\
 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
p-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p-2 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
m-2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m-1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Le déterminant D_p^m joue un rôle important dans

l'évaluation du déterminant Δ_p^m ; c'est pourquoi nous le nommerons *le déterminant caractéristique de* Δ_p^m.

La structure du déterminant caractéristique D_p^m est bien évidente : nous remarquerons cependant que c'est uniquement la $p^{\text{ième}}$ ligne horizontale, qui ne contient pas l'élément -1 ; ensuite, c'est dans la $(p-1)^{\text{ère}}$ ligne que cet élément réapparaît et cette fois-ci sous la diagonale principale.

On trouve la valeur de D_p^m par réduction de son degré. Nous supposerons d'abord que les nombres p et m ne sont pas égaux entre eux.

1° $p < m$. Nous ajoutons la première ligne horizontale à la $(p+1)^{\text{ère}}$, la seconde à la $(p+2)^{\text{ième}}$ et ainsi de suite p fois. Par ce procédé, les p premières colonnes de D_p^m ne contiennent qu'une fois l'élément 1, tandis que tous les autres éléments sont 0 ; l'élément 1 se trouve dans la diagonale principale. Il s'ensuit que le déterminant est réduit au degré $m-1$; par sa construction, ce déterminant n'est autre chose que le déterminant caractéristique du déterminant circulaire Δ_p^{m-p}.

2° $p > m$. En suivant le même procédé que plus haut, mais avec les $m-1$ premières et $m-1$ dernières lignes horizontales, nous obtenons le déterminant caractéristique du déterminant circulaire Δ_{p-m}^m.

On voit que, dans les deux cas, le degré du déterminant se réduit du plus petit des deux nombres p et m.

Si les nombres p et m sont premiers entre eux, une première réduction du degré du déterminant D_p^m par p ou m donne un déterminant de la même forme, où $p \gtrless m-p$ ou bien $p-m \gtrless m$. Nous continuons la même réduction avec le déterminant obtenu, et, comme p et m sont des nombres entiers qui n'ont aucun

diviseur commun, nous arrivons au cas où l'un des nombres p ou m est 1. Mais ici nous avons le déterminant D_k^1 ou D_1^k, dont la valeur est 1.

Si, au contraire, p et m ont un diviseur commun, par la réduction successive de degré du déterminant proposé, nous arrivons au cas où le déterminant ne contient qu'une seule des lettres a ou b, et dont la valeur est nulle. Par conséquent, si p et m ont un diviseur commun différent de 1, la valeur du déterminant Δ_p^m est nulle.

De ce que nous venons d'exposer il résulte que *la valeur du déterminant en question est*

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(a-b)^{n-1}(pa+mb) \qquad \text{ou} \qquad \textit{zéro},$$

suivant que p et m sont des nombres premiers entre eux ou non.

2. *Par les propriétés des déterminants circulaires.* — Profitons maintenant de la formule exprimant la valeur du déterminant circulaire, formé de n éléments différents $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Comme on sait ([1]), cette formule est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n),$$

où

$$\varphi(\alpha) = a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 + \ldots + a_n a^{n-1}$$

et les α sont les racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$.

Dans notre cas

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a, \qquad a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_n = b,$$

([1]) STERN, *Einige Bemerkungen über eine Determinante* (*Journ. f. Math.*, Bd. 73, 1871, p. 374-380). — E. PASCAL, *Die Determinanten*, 1900, p. 73).

de sorte que

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) = {} & a\,(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{p-1}) \\ & + b\,\alpha^p(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\Delta_p^m &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{i=1}^{i=n} \big[a\,(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1}) \\ &\qquad + b\,\alpha_i^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1})\big] \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa+mb) \prod_{i=1}^{i=n-1} \big[a\,(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1}) \\ &\qquad + b\,\alpha_i^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1})\big].\end{aligned}$$

Et, comme

$$1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1} = -\alpha_i^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1}),$$

nous recevons

$$\begin{aligned}\Delta_p^m = {} & (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa+mb) \\ & \times (a-b)^{n-1} \prod_{i=1}^{i=n-1} (1+\alpha_i+\alpha_i^2+\ldots+\alpha_i^{p-1}).\end{aligned}$$

Des facteurs sous le signe Π, nous concluons que si les nombres p et m, et par équivalence si p et n ont un diviseur commun, le produit devient nul. Donc $\Delta_p^m = 0$.

Au contraire, si les nombres p et m n'ont pas de diviseur commun, le déterminant a la valeur

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa+mb)(a-b)^{n-1}.$$

En effet, si nous faisons les multiplications sous le signe Π, ayant en vue les propriétés des fonctions symétriques des racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$,

nous trouvons

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (1 + \alpha_i + \alpha_i^2 + \ldots + \alpha_i^{p-1}) = 1.$$

Cas particuliers. — Pour $a = 1$, $b = 0$, la valeur du déterminant Δ_p^m est

$$0, \quad -p, \quad p,$$

suivant que p et m ont respectivement un diviseur commun ou bien que $p + m = n$ est un nombre de la forme $4k - 1$ ou $4k$, ou bien encore qu'il a la forme $4k + 1$ ou $4k + 2$.

Pour $a = -1$, $b > 1$, nous avons le déterminant de Catalan. Nous arrivons donc au résultat que la condition $p < \frac{n}{2}$, posée par Catalan, loin d'être nécessaire, est tout à fait inutile. Au contraire, il est indispensable de considérer si les nombres p et n, ou ce qui est la même chose, p et m ont ou n'ont pas de diviseur commun, car, dans le premier cas, le déterminant de Catalan a la valeur nulle, ce que l'auteur n'a pas prévu.

Pour $a = -1$, $b = 1$, $p = 1$, nous avons le déterminant circulaire, étudié par Catalan et M. Fouret (1).

[O5k]

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS ORTHOGONAUX EN PROJECTION SUR UN PLAN;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,

Professeur au Lycée de Poitiers.

---

1. Dans les *Nouvelles Annales* de 1869 (p. 563 et

---

(1) Remarque sur certains déterminants numériques (*Bull. Soc. math. de France*, t. XV, 1887).

sous le n° 975), Ribaucour proposa la question suivante : *Étant donnée une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver, sur cette surface, un réseau conjugué se projetant, sur le plan donné, suivant un réseau orthogonal.*

Une solution de cette question fut publiée dans les *Nouvelles Annales* de 1872 (p. 177 et suiv.). Le plan donné étant pris pour plan horizontal Oxy, soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ (Oz étant vertical), de la surface donnée (S) ; soient p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de la cote z, par rapport à x et à y ; le réseau demandé (C) a pour équation

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq};$$

il se projette, par suite, horizontalement, suivant les courbes intégrales de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Pour une quadrique à centre, cette équation différentielle n'est autre que celle des coniques homofocales; de même, pour un paraboloïde, l'équation est celle des paraboles homofocales; pour le cône, on obtient des cercles concentriques et les rayons émanant de leur centre commun. L'Auteur de la solution publiée est amené à envisager le cas d'indétermination de l'équation différentielle : les deux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$s = 0, \qquad r - t = 0.$$

sont alors simultanément vérifiées; leur intégrale commune est un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

Tout ceci est parfaitement exact. Mais il n'en est pas de même de l'affirmation suivante concernant le cas du paraboloïde de révolution précédent : « le système conjugué demandé se compose des parallèles et des méridiens (ou des lignes de courbure) et se projette sur le plan donné suivant un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun » (p. 180). Le réseau conjugué, formé par les lignes de courbure, est bien un réseau répondant à la question, puisque le paraboloïde de révolution est une surface moulure très particulière; mais il n'est pas le seul : *tout réseau conjugué du paraboloïde de révolution se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution*, ainsi que je vais l'établir.

2. Dans un article intitulé *Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan*, inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai fait une étude générale de ces réseaux, sur une surface quelconque; je me suis principalement placé au point de vue de la théorie de certaines équations linéaires, aux dérivées partielles du second ordre, dont la propriété caractéristique est d'admettre trois solutions telles que la troisième soit la somme des carrés des deux premières; je me proposais surtout de mettre en évidence l'analogie avec la théorie des lignes de courbure et de déterminer toutes les surfaces qui sont ainsi associées à un réseau orthogonal, donné dans le plan horizontal Oxy. Je vais maintenant développer des considérations d'un ordre plus élémentaire et plus géométrique.

Il s'agit donc de résoudre, pour une surface quelconque (S), le problème que Ribaucour proposa pour les quadriques; je désignerai par (C) les courbes du réseau demandé.

Les deux courbes (C), projetées horizontalement, qui se croisent en un point m du plan Oxy ont nécessairement pour tangentes les axes de symétrie de la conique qui est la projection horizontale de l'indicatrice de la surface (S) au point M dont m est la projection. En d'autres termes, les courbes (C) projetées bissectent les lignes asymptotiques projetées. Ces propriétés sont analogues à celles des lignes de courbure. Elles permettent de former de nouveau l'équation différentielle des courbes (C) projetées : l'indicatrice, en projection horizontale, ayant pour équation

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=1,$$

l'équation quadratique de ses axes de symétrie est

$$s(Y-y)^2-s(X-x)^2+(r-t)(X-x)(Y-y)=0;$$

de cette équation, découle immédiatement l'équation différentielle précédemment indiquée des projections des courbes (C).

Considérons une quadrique générale; soit (Γ) la conique qui est le contour apparent de cette quadrique sur le plan horizontal Oxy; les projections des asymptotiques sont alors les deux tangentes menées de m à la conique (Γ) : les courbes (C) sont, par conséquent, les coniques homofocales à la conique (Γ).

Ceci a lieu lorsque le contour apparent est une véritable conique; celle-ci peut dégénérer tangentiellement en deux points *autres que les points cycliques* du plan Oxy; elle peut même dégénérer en un

point double : c'est alors le cas du cône du second degré et, plus généralement d'ailleurs, d'un cône quelconque ; pour un cône, le réseau projeté se compose de cercles concentriques et de droites émanant de leur centre commun.

Mais, dans le cas singulier où le contour apparent se compose des deux points cycliques, il y a évidemment indétermination ; la quadrique est alors un paraboloïde de révolution d'axe vertical. Toute section plane se projette suivant un cercle ; l'indicatrice se projette donc suivant un cercle et tout réseau conjugué de ce paraboloïde se projette suivant un réseau orthogonal.

3. J'ai écrit plus haut que, dans le cas où la surface (S) est une surface moulure, attachée à un cylindre vertical, le réseau (C), conjugué sur elle et qui se projette horizontalement suivant un réseau orthogonal, est celui des lignes de courbure de la surface moulure.

La propriété réciproque est presque évidente : pour que le réseau (C) soit précisément le réseau des lignes de courbure de la surface (S), il faut que celle-ci soit une moulure quelconque associée à un cylindre vertical.

De même, pour que le réseau conjugué (C) contienne, soit les lignes de niveau, soit les lignes de plus grande pente de (S), il faut et il suffit qu'on se trouve dans le cas, qui précède, d'une surface moulure.

Ces considérations s'appliquent au cas particulier où la surface moulure est une surface de révolution autour d'un axe vertical ; le cas du paraboloïde de révolution étant excepté, le réseau conjugué (C) est alors formé par les parallèles et les méridiens de la surface de révolution.

La notion de parallèles et de méridiens d'une surface de révolution fut généralisée par Minding et étendue à une surface quelconque : les parallèles sont les courbes le long desquelles les normales à la surface font un angle constant avec la direction Oz; les méridiens sont de même les lignes le long desquelles les normales à la surface se projettent sur Oxy suivant les droites parallèles. En d'autres termes, les parallèles de la surface se projettent suivant les courbes d'équations

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

et les méridiens, suivant les courbes d'équations

$$\frac{p}{q} = \text{const.}$$

Si l'on impose aux parallèles et aux méridiens la condition d'être conjugués, la surface (S) est nécessairement une moulure. Montrons qu'il en est également ainsi lorsqu'on impose la condition, que le réseau (C) contienne soit les parallèles de la surface (S), soit les méridiens de cette même surface.

Dans le premier cas, on déduit des deux équations

$$p\,dp + q\,dq = 0,$$
$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

la condition

$$p\,dx + q\,dy = dz = 0;$$

celle-ci exprime que les parallèles sont confondus avec les lignes de niveau de la surface (S). Dans le second cas, de même, on déduit de l'équation différentielle des méridiens

$$p\,dq - q\,dp = 0,$$

la relation

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$

qui exprime l'identité de ces méridiens et des lignes de plus grande pente de la surface. Dans l'un ou l'autre cas, la surface est donc une surface moulure.

4. Dans le cas d'une surface (S) intégrale de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv r + t = 0,$$

les lignes asymptotiques de cette surface (S) se projettent sur le plan horizontal Oxy suivant un réseau orthogonal. La détermination des lignes conjuguées (C) d'une telle surface est donc identique à la révolution d'un problème de trajectoires obliques, sous l'angle de 45°, dans le plan Oxy. En se reportant alors à la page 92 des *Nouvelles Annales* de février 1909, on voit que, l'équation des asymptotiques pouvant être ramenée à la forme

$$\int \sqrt{U''}\, du \pm \int \sqrt{V''}\, dv = \text{const.},$$

celle des courbes (C) est alors

$$\int \sqrt{U''}\, du \pm i \int \sqrt{V''}\, dv = \text{const.};$$

les quadratures à effectuer sont les mêmes dans les deux cas.

Plus particulièrement, dans le cas des surfaces d'équations

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = r^{K}\sin K(\omega - \omega_0),$$

considérées aux pages 95 et 396 du Tome cité, les projections des courbes (C) sont des spirales sinusoïdes.

5. Le cas particulier où la surface intégrale de l'équation de Laplace est de révolution, c'est-à-dire celui de la surface engendrée par la courbe logarithmique

$$z = \operatorname{Log} r.$$

est à signaler : les asymptotiques sont alors, en projection, les spirales logarithmiques

$$r\, d\omega = \pm\, dr,$$

trajectoires, sous l'angle de 45°, des droites qui émanent de l'origine O ou des cercles de centre O; les courbes (C) sont ces droites et ces cercles puisque la surface est de révolution.

Considérons de même le cas où la surface est un hélicoïde gauche à plan directeur horizontal; soit

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

l'équation de cet hélicoïde (S); c'est une surface intégrale de l'équation de Laplace; ses asymptotiques se projettent sur Oxy suivant les droites émanant de O et suivant les cercles de centre O. Les courbes (C) projetées horizontalement sont nécessairement les spirales logarithmiques

$$r\, d\omega = \pm\, dr.$$

Il y a donc un certain rapprochement à faire entre la surface de révolution précédente et l'hélicoïde gauche à plan directeur. Plus généralement, il y a lieu d'associer deux à deux les surfaces intégrales de l'équation de Laplace. Pour la surface (S_1) d'équation

$$z = U - V,$$

$$x = \frac{u + v}{2}, \qquad y = i\,\frac{v - u}{2};$$

les asymptotiques et les courbes (C) ont, en projection horizontale, pour équations différentielles respectives,

$$U'' du^2 - V'' dv^2 = 0,$$
$$U'' du^2 + V'' dv^2 = 0;$$

si l'on associe donc à (S_1) la surface (S_2) d'équation

$$z = U + V,$$

les projections des asymptotiques de l'une des surfaces (S_1) *et* (S_2) *sont les projections des courbes* (C) *de l'autre surface, et inversement.*

6. Au paragraphe 5, j'ai été amené à considérer le réseau formé par les cercles concentriques et leurs rayons, et le réseau formé par les spirales logarithmiques

$$r\, d\omega = \pm\, dr.$$

Dans mon article inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai déterminé et défini géométriquement, comme surface diamétrale d'un cône et d'une surface de révolution, la surface la plus générale qui peut être associée au premier de ces réseaux (§ VII de l'article cité). Je vais consacrer la fin du présent article à la détermination de la surface (S) la plus générale, dont le réseau projeté (C) est celui des spirales logarithmiques

$$r\, d\omega = \pm\, dr.$$

En coordonnées ordinaires, cette surface (S) est l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on obtient en posant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y},$$

dans l'équation différentielle des courbes (C) projetées; cette équation prend la forme

$$\frac{r - t}{s} + \frac{4xy}{x^2 - y^2} = 0.$$

Il faut donc intégrer ou transformer cette équation. Il est préférable de procéder de la façon suivante :

Partons des équations

$$re^{-\omega} = e^{2u},$$
$$re^{\omega} = e^{2v},$$

des deux familles de spirales logarithmiques; ce réseau orthogonal et isothermique donne à l'élément linéaire du plan la forme

$$ds^2 = 2e^{2(u+v)}(du^2 + dv^2);$$

l'équation linéaire qu'il convient de lui associer est donc

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0;$$

c'est une équation à invariants égaux, puisque le réseau de spirales est isothermique; on a

$$h = k = 1;$$

l'équation est donc réductible à la forme canonique

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \, \partial v} = \theta_1.$$

On reconnaît l'une des formes qu'il est possible de donner à *l'équation des télégraphistes*. Ainsi donc *la détermination des surfaces telles que le réseau* (C) *projeté soit celui de l'hélicoïde gauche à plan directeur est réductible à l'intégration de l'équation des télégraphistes.*

En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U - V,$$

on obtient l'hélicoïde lui-même. En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U \times V,$$

on trouve

$$\theta = e^{Au+Bv} \text{ const.};$$

A et B sont deux constantes liées par la relation

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1;$$

on posera donc

$$A = \frac{2}{1+C}, \qquad B = \frac{2}{1-C},$$

C étant une constante arbitraire.

Les surfaces (S), qui correspondent à la solution particulière ainsi déterminée, ont pour équation générale

$$\frac{1-C^2}{2} \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + C\omega;$$

elles rentrent dans la famille des *surfaces spirales* qui ont été signalées par M. A. Buhl dans son Mémoire *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (*Nouvelles Annales*, octobre 1908, § 7); en appliquant les formules de M. Buhl, on trouve pour projections des asymptotiques deux familles de spirales logarithmiques

$$\frac{dr^2}{r^2} + 2C\,d\omega\,\frac{dr}{r} + d\omega^2 = 0$$

(en écartant le cas singulier $C = i$, pour lequel la surface dégénérerait en un plan imaginaire).

[D5c]

PRINCIPE DE DIRICHLET. LA FORMULE DE POISSON;

Par M. R. d'ADHÉMAR.

Lorsque se produit une puissante synthèse, comme celle de MM. Fredholm, Hilbert, etc., pour les problèmes de la Physique mathématique (à caractéristiques imaginaires), il est intéressant de *retrouver*, par la méthode nouvelle, les solutions anciennes relatives aux cas les plus simples.

Nous allons voir que, par la théorie des potentiels, et sans faire usage des transcendantes de M. Fredholm, on retrouve facilement la formule de Poisson.

Il s'agit, on le sait, de trouver la solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

la fonction u étant donnée sur une *circonférence*. C'est le problème de Dirichlet.

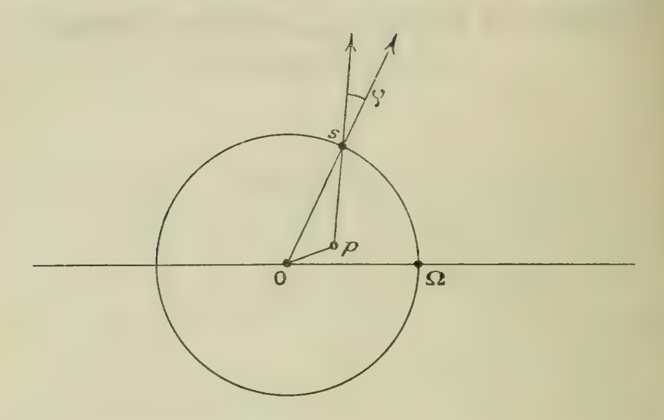
Nous rappelons [1] que l'on résout le problème de Dirichlet *intérieur*, dans le plan, par un potentiel *de double couche*. Soit W_p ce potentiel, au point p; on aura

$$(1) \qquad W_p = \int_0^L \nu_s \frac{\cos\varphi}{r_p} ds.$$

L étant la longueur du contour donné; r_p la distance

[1] *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur (Gauthier-Villars), t. I, Chap. VIII et Chap. IX. *Voir* aussi : O. D. Kellogg, *Theorie der Integralgleichungen und der Dirichlet'schen Princips*, Göttingen, 1902.

du point p au point s sur le contour; φ étant l'angle de la droite r_p avec la normale au contour au point s; ν étant la densité; ds étant l'élément d'arc du contour.



La densité ν_s est donnée par l'équation de Fredholm

$$\nu_s + \frac{1}{\pi}\int_0^L \frac{\cos\varphi}{r}\nu_\sigma\, d\sigma = \frac{W_i}{\pi} = \psi_s, \tag{2}$$

W_i est la fonction donnée sur la frontière et r est la distance du *point fixe* Ω, sur le contour, au *point mobile* s, sur ce même contour.

Si le contour est un cercle de rayon R, on a

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{R}{2} = \text{const.}$$

Dans ce cas, on a *immédiatement* $\nu_s = \psi_s + A$. A est une constante, que nous déterminons par identification, ce qui donne

$$A + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi R}(\psi_\sigma + A)\, d\sigma = 0; \tag{3}$$

A est donc connu, donc ν_s est connu, et nous avons à calculer W_p, par la formule (1).

Le triangle Ops donne, en posant $\overline{Op} = l$, longueur donnée, puisque le point p est donné

$$l^2 = R^2 + r_p^2 - 2Rr_p \cos\varphi,$$
$$\frac{\cos\varphi}{r_p} = \frac{1}{2R}\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right).$$

On aura donc

$$(4)\qquad W_p = \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A)\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right)\frac{ds}{2R}.$$

Tenons compte de la relation (3); d'où

$$(5)\qquad \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A)\frac{ds}{2R} = -\frac{\pi A}{R^2}.$$

Maintenant, pour une densité *constante* et égale à A, nous aurions un potentiel double *constant*, dans le domaine intérieur [1], ce qui donne

$$W'_p = \int A\, d\omega = 2\pi A.$$

Appliquant la formule (4), cela donnera

$$(6)\qquad 2\pi A = \int_0^{2\pi R} A\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right)\frac{ds}{2R},$$

quel que soit le point *intérieur* p.

De là résulte, en posant $W_i = F_s$, fonction donnée [2] :

$$W_p = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} F_s\, ds.$$

---

[1] *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur, t. I, p. 218 (ω est l'angle solide).

[2] Il suffit d'écrire :

$$(\psi_s + A)\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2}\right) = (\psi_s + A) + \psi_s\frac{R^2 - l^2}{r^2} + A\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2}\right) - A$$

et d'utiliser les formules (5) et (6).

C'est *la formule de Poisson*. On pourra poser

$$ds = R\, d\theta,$$

θ étant l'arc de cercle, et

$$r_p^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta - \alpha),$$

l et α étant les coordonnées polaires du point p.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2172.

(1911, p. 94.)

Dans le plan ABC *on mène les droites* AD, BE, CF, *qui se coupent en un point* P. *Soit* Q *la conique circonscrite à* ABC *et tangente en* A, B, C *aux parallèles à* EF, FD, DE.

I. *Les parallèles à* PA, PB, PC, *menées par un point* O *de* Q, *coupent* BC, CA, AB *en* λ, μ, ν, *et l'on a la droite* $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$.

II. *En permutant les points* O *et* P, *on a une seconde droite* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$.

III. *Les droites* Δ *et* Δ' *se coupent au milieu* ω *de* OP. *Cas où* P *est l'orthocentre de* ABC. P. SONDAT.

SOLUTION

Par M. PARROD.

Le cas où P est l'orthocentre de ABC a été proposé par M. Sondat et résolu dans les *Nouvelles Annales*, 1907, p. 332; dans ce cas la conique Q est le cercle circonscrit.

Le cas général s'en déduit par projection oblique sur un plan.

On peut aussi considérer le cylindre droit qui a pour base la figure donnée. Une section circulaire du cylindre ayant pour base la conique Q donne la figure particulière précédente,

car le triangle $D_1E_1F_1$ dont la projection est DEF a ses côtés antiparallèles à ceux du triangle $A_1B_1C_1$; dans ce triangle, les droites A_1D_1, B_1E_1 et C_1F_1 sont les hauteurs.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2174.

(1911, p. [illegible].)

Si un point O *décrit le cercle* ABC, *on sait que les parallèles à* OA, OB, OC, *menées par l'orthocentre* P *du triangle* ABC, *coupent* BC, CA, AB *en trois points en ligne droite.*

Démontrer que cette droite Δ *enveloppe la conique* Q *inscrite à* ABC *et concentrique au cercle d'Euler.*

Si Δ_1 *est la droite correspondant au point* O_1 *diamétralement opposé à* O, *le point* $O'(\Delta\Delta_1)$ *décrit la directrice* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$ *de* Q, *relative à son foyer* P, *et qu'on obtient en menant les parallèles* $P\lambda'$, $P\mu'$, $P\nu'$, *aux tangentes en* A, B, C.

La corde II_1 *des contacts tourne autour de* P *en restant perpendiculaire à* PO'. P. Sondat.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soit $\lambda\mu\nu$ la droite Δ. L'angle $\mu P\nu$ est constant, donc cette droite enveloppe une conique inscrite dans le triangle ABC; l'un de ses foyers est P, l'autre foyer est le point inverse de P, c'est-à-dire le centre du cercle ABC; son cercle principal est le cercle pédal commun à ces deux points, c'est le cercle d'Euler; les symétriques du point P par rapport aux trois côtés du triangle ABC étant sur le cercle circonscrit, le cercle directeur du foyer P est le cercle ABC.

Soit $\lambda_1\mu_1\nu_1$ la droite Δ. L'angle $\lambda P\lambda_1$ est constant, donc la corde des contacts II_1 des tangentes Δ, Δ_1 passe par P et le point $O'(\Delta\Delta_1)$ est sur la directrice du foyer P et de plus cette corde est perpendiculaire sur PO'.

La droite $P\lambda'$ est perpendiculaire sur le diamètre du point A et le point de contact de Q avec BC est un point D tel que PD est parallèle à ce diamètre; la droite $P\lambda'$ étant perpendi-

culaire sur PD, le point λ' appartient à cette directrice. On démontrerait de même que μ' et ν' sont situés sur elle.

Autres solutions par MM. Bouvaist et Gisolf.

2175.

(1911, p. 95.)

Soient A', B', C' *trois points pris sur les côtés d'un triangle* ABC *de telles manières que les droites* AA', BB', CC' *soient concourantes; soient* α, β, γ *trois points pris sur les côtés du triangle* A'B'C *tels que les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *soient concourantes. Démontrer que les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *sont concourantes.* Giraudon.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Projetons l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C' suivant la droite de l'infini, nous obtenons deux triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' ayant leurs côtés parallèles; si α_1, β_1, γ_1 sont les projections de α, β, γ, nous avons

$$\frac{\alpha_1 C'_1}{\alpha_1 B'_1}\,\frac{\beta_1 B'_1}{\beta_1 A'_1}\,\frac{\gamma_1 A'_1}{\gamma_1 C'_1} = 1.$$

les droites $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ rencontrent B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 en α'_1, β'_1, γ'_1 et l'on a

$$\frac{\alpha_1 C'_1}{\alpha_1 B'_1} = \frac{\alpha'_1 C_1}{\alpha'_1 B_1};$$

de cette relation et des deux autres analogues on déduit la suivante

$$\frac{\alpha'_1 C_1}{\alpha'_1 B_1}\,\frac{\beta'_1 B_1}{\beta'_1 A_1}\,\frac{\gamma'_1 A_1}{\gamma'_1 C_1} = 1,$$

qui montre que les droites $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ sont concourantes.

Autres solutions par MM. Abramescu, Gisolf, Klug, Lemaire et Parrod.

2176.

(1911, p. 95.)

On considère une parabole P *et une droite* D *perpendiculaire à l'axe de* P. *Soient* A, B, C *les pieds des normales à* P *abaissées d'un point quelconque* M *de* C; A_1, B_1, C_1 *les points de Frégier et* A_2, B_2, C_2 *les centres de courbure relatifs à* A, B, C. *On a entre les aires des trois triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$ *les relations* $ABC = A_1B_1C_1$ *et* $\frac{ABC}{A_2B_2C_2} = \text{const.}$

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Si A' est le symétrique du point A par rapport à l'axe de la parabole, le point de Frégier A_1 relatif à A est sur le diamètre A'A, et la longueur $A'A_1 = 2p$ (p étant le paramètre de la parabole donnée). Le lieu du point A_1 est, par suite, la parabole coaxiale et égale à la parabole donnée obtenue en faisant subir à cette dernière une translation, telle que la distance des deux sommets soit égale à $2p$. Ceci posé, il est évident que les triangles A', B', C' sont équivalents, et comme $A'B'C' = ABC$, $A_1B_1C_1 = ABC$ et cette relation a lieu quels que soient les points A, B, C pris sur la parabole.

Si la parabole donnée est $y^2 - 2px = 0$, si $x = \frac{t_i^2}{2p}$, $y = t_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont les coordonnées des points ABC, l'aire du triangle ABC est $\frac{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}{2p}$, les coordonnées des points A_2 B_2 C_2 sont $x = p - \frac{3t_i^2}{2p}$, $y = -\frac{t_i^3}{p^2}$, l'aire $A_2B_2C_2$ est égale à

$$\frac{3(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}{2p^3}(t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3),$$

$$\frac{A_2B_2C_2}{ABC} = \frac{3(t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3)}{p^2}.$$

L'équation aux t des points d'intersection de l'hyperbole

d'Apollonius d'un point x_0, y_0 avec la parabole étant

$$\frac{t^3}{2p} + t(p - x_0) - py_0 = 0,$$

on voit que $\frac{A_2 B_2 C_2}{ABC}$ = const. si x_0 est constant.

Remarque. — Étant donnée une conique quelconque, les points de Frégier de ces différents points sont sur une conique homothétique et concentrique à cette conique, le rapport des aires des triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$ est donc constant.

Autres solutions par MM. Klug et Lemaire.

2177.

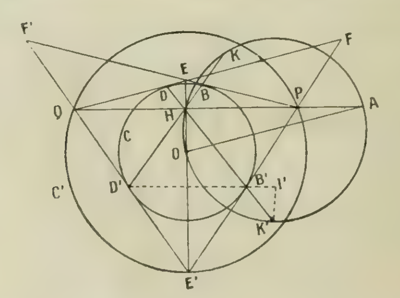
(1911, p. 96.)

On donne deux cercles concentriques C *et* C′ *et un point* A. *Une droite quelconque passant par* A *rencontre* C′ *en* P *et* Q. *Le lieu des sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes à* C *issues de* P *et* Q *se compose d'une conique et de deux droites.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Les tangentes PB′, QD′ du même côté que le centre O de la droite PQ se rencontrent en E′, les deux autres se rencontrent en E; désignons par F et F′ les deux autres points d'intersection.



La droite EE′ est un diamètre perpendiculaire sur PQ en H et les droites DB′, BD′ passant par H; les bissectrices des angles de ces deux cordes sont les diagonales EE′, PQ et leur angle BHB′ est constant, car l'arc BB′ est constant. Le point H décrit la circonférence de diamètre AO, en désignant par O le centre du cercle C, donc les cordes DB′ et BD′ rencontrent le cercle OA en deux points fixes K et K′. Les points F, F′ décrivent les polaires, dans le cercle C, des points K′, K.

La corde B′D′ est parallèle à PQ, abaissons K′I′ perpendiculaire sur B′D′, cette droite est aussi perpendiculaire sur DB en I; les angles K′B′I′, K′DI sont égaux et constants. I et I′ décrivent un cercle déduit du cercle C par une homothétie et une rotation amenant le point O au milieu de KK′, les cordes DB, D′B′ enveloppent une conique de foyers K, K′ et les points E, E′ décrivent sa polaire réciproque dans le cercle C.

Autre solution par M. Klug.

2178.

(1911, p. 96.)

On donne une ellipse E *et un point* P *sur le grand axe, et l'on considère une corde variable* PAB. *Le lieu des centres de similitude des cercles décrits sur* PA *et* PB *comme diamètres se compose du grand axe et d'une droite perpendiculaire au grand axe.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Plus généralement, supposons le point P quelconque. Le deuxième centre de similitude étant S, on a

$$SP^2 = SA \cdot SB.$$

S étant le milieu du segment PP′, le point P′ décrit la polaire du point P, d'où le lieu du point S.

(Le diamètre du point P ne fait pas partie du lieu.)

Autre solution par MM. Abramescu et Bouvaist.

QUESTIONS.

2196. Une sécante quelconque d'une ellipse donnée rencontre l'ellipse de Frégier en deux points de Frégier μ et μ' et l'ellipse donnée en b et c. Le cercle de diamètre bc rencontre l'ellipse donnée en deux points a et a' qui correspondent aux points μ et μ'. (Dr W. GAEDECKE.)

2197. Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez + f = 0$$

pour que le produit de trois des racines soit égal au produit des trois autres. (Dr W. GAEDECKE.)

2198. On considère le quadrilatère ABCD inscriptible dans un cercle.

Le triangle ABC est équilatéral, le côté CD est le côté du carré inscrit, et le côté AD est celui du dodécagone régulier inscrit.

Montrer que l'aire du triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère est les $\frac{24}{13}$ du carré qui a pour côté la distance des milieux des deux diagonales intérieures.

(E.-N. BARISIEN.)

2199. On considère un point M du plan d'une parabole P, tel que l'une des trois normales abaissée de M sur P soit bissectrice extérieure de l'angle des deux autres (*). Montrer que le lieu des sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds des normales se compose d'une parabole et d'une quartique. (E.-N. BARISIEN.)

[C1a]

SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE;

Par M. Maurice FRÉCHET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

INTRODUCTION.

1. En cherchant à préciser dans le Calcul fonctionnel la notion de différentielle, j'ai été amené à examiner de près la définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Je me suis alors aperçu que non seulement la définition ordinairement adoptée (1) n'est pas propre à la généralisation que j'avais en vue, mais encore qu'elle n'est pas en soi satisfaisante.

On dit généralement (2) qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes $f(x, y, \ldots, u)$ possède

(1) Dans la suite, je renverrai par des chiffres romains aux ouvrages suivants :

I. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, t. I, Paris, 1907.

II. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris, 1910, 2e édition.

III. Humbert, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris, 1903.

IV. De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, 2e édition, Paris, 1909.

V. J. Pierpont, *Theory of functions of real variables*, t. I, Boston, 1905.

VI. Stolz, *Grundzüge der Differential und Integral-Rechnung*, t. I, Leipzig, 1893.

VII. W.-H. Young, *The fondamental theorems of Differential Calculus*, Cambridge, 1910.

VIII. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2e édition, Paris, 1904.

(2) I, p. 71 ; IV, p. 117.

une différentielle totale au point $x_0, y_0, \ldots, u_0$, si cette fonction admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_0}$, par rapport à chacune de ses variables; et alors cette différentielle est par définition

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0}\Delta u,$$

où Δx, Δy, ..., Δu sont des accroissements arbitraires des variables $x, y, \ldots, u$.

2. Si maintenant on examine les théorèmes où intervient l'existence de la différentielle, on observe que les énoncés généralement adoptés pour le cas de plusieurs variables contiennent des hypothèses restrictives qui ne figurent pas dans les énoncés relatifs aux cas d'une variable. Donnons les exemples suivants :

Une fonction $f(x)$ qui est différentiable pour $x = x_0$, est nécessairement continue pour $x = x_0$.	Si une fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et à y au point x_0, y_0 *et en son voisinage* et si de plus ses dérivées partielles *sont bornées* dans ce voisinage, la fonction $f(x, y)$ est nécessairement continue au point x_0, y_0 (et en son voisinage) par rapport à l'ensemble des variables (x, y) (I, p. 69; VIII, p. 364).
Si une fonction $u(x)$ admet une différentielle pour $x = x_0$ et si une fonction $f(u)$ admet une différentielle en u pour $u = u(x_0)$, la fonction $f[u(x)]$ admet une différentielle en x pour $x = x_0$	Si des fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et si une fonction $f(u, v, w)$ est différentiable au point $u(x_0, y_0)$, $v(x_0, y_0)$, $w(x_0, y_0)$, en u, v, w ; *si en outre* les dérivées partielles par rapport à u, v et w existent au voisinage de ce même

et cette différentielle s'obtient en remplaçant, dans la différentielle de $f(x)$, l'accroissement de u par sa différentielle.

point et sont continues en ce point, la fonction

$$f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$$

est différentiable par rapport à x et à y au point x_0, y_0 et sa différentielle s'obtient en remplaçant dans la différentielle de $f(u, v, w)$, les accroissements de u, v, w par leurs différentielles (VIII, p. 369).

Si une fonction $f(x)$ admet une différentielle au point x_0 la courbe $y = f(x)$ a en ce point une tangente non parallèle à oy dont le coefficient angulaire est le coefficient de Δx dans la différentielle de f.

Si une fonction $f(x, y)$ est continue *et admet une différentielle continue* au point x_0, y_0 *et en son voisinage*, la surface $s = f(x, y)$ admet au point $[x_0, y_0]$, $[f(x_0, y_0)]$ un plan tangent non parallèle à oz, dont les coefficients angulaires sont les coefficients de Δx, Δy, dans la différentielle de s au point (x_0, y_0).

3. Or on ne peut se servir de la notion de différentielle sans avoir à utiliser l'une des propriétés précédentes. *De sorte que pratiquement la définition que l'on emploie véritablement, ce n'est pas la définition théorique précédemment rappelée, mais celle-ci :* une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si elle est continue, si elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u}$ au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ et au voisinage de ce point, et si ces dérivées partielles sont continues au point $x_0, \ldots, u_0$; et alors cette différentielle est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0}\Delta u.$$

Ainsi la simplicité de la définition théorique rappelée plus haut n'est qu'un trompe-l'œil. Mieux vaudrait

adopter franchement la définition pratique que nous venons de formuler [1]; moyennant une telle définition, on rétablirait l'analogie entre les énoncés relatifs au cas d'une variable et ceux qui concernent le cas de plusieurs variables.

Mais après avoir reconnu que la définition théorique est trop large, nous devons observer que la définition pratique, telle qu'elle résulte des Ouvrages classiques, est trop étroite et inutilement compliquée comme nous le montrerons dans la suite.

On est donc amené à chercher une définition de la différentielle qui se place pour ainsi dire entre les deux précédentes. J'étais ainsi arrivé à formuler une définition que je croyais nouvelle [2]. Mais je me suis aperçu qu'on trouve déjà cette définition dans Stolz, *Grundzüge der Differential und Integral-Rechnung*, t. I, p. 133, et James Pierpont, *The theory of functions of real variables*, t. I, p. 268. Mais c'est W.-H. Young qui en a véritablement montré le premier tous les avantages dans son petit Livre : *The fundamental theorems of Differential Calculus* et dans quelques Mémoires. Après lui, le travail actuel pourrait paraître superflu. J'ai cru cependant utile de le publier parce que la simplification apportée dans les principes fondamentaux du Calcul différentiel me paraît assez grande pour qu'on puisse désirer au point de vue pédagogique que les conséquences de la nouvelle définition fussent exposées en français. J'ai donné en outre à la définition de Stolz une forme analytique *équivalente* à la sienne et d'ailleurs à peine différente, mais qui a l'avantage

---

(1) En fait, c'est peut-être ce qui convient le mieux à une exposition élémentaire; *voir* IV, p. 28, III, p. 56.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLII, 1911, p. 843, 1050.

d'être plus rapprochée de la définition historique par les infiniment petits et de se prêter en outre immédiatement à l'extension au Calcul fonctionnel qui était mon but principal. De plus, j'ai indiqué une proposition sur les relations entre la différentielle seconde et la différence seconde qui n'avait pas été, je crois, obtenue jusqu'ici rigoureusement.

J'ajoute, et ce sera avec le précédent le seul point véritablement nouveau de ce travail, qu'on serait conduit à la même définition de la différentielle première que celle de Stolz, si l'on partait d'une définition descriptive basée sur l'interprétation géométrique de la différentielle. Ce n'est pas celle que je prendrai comme point de départ. Néanmoins, il me semble que si l'exposé de W.-H. Young a déjà fait ressortir la commodité de la définition de Stolz, la définition géométrique à laquelle je fais allusion lui confère en outre en quelque sorte un caractère de nécessité. C'est la suivante.

Définition. — Une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle à mon sens au point (x_0, y_0) si la surface $z = f(x, y)$ admet au point (x_0, y_0) un plan tangent non parallèle à Oz

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

La différentielle de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) est alors

$$d\,f(x, y) = p\,\Delta x + q\,\Delta y,$$

où Δx, Δy sont des accroissements arbitraires de x, y.

NOUVELLE DÉFINITION ANALYTIQUE DE LA DIFFÉRENTIELLE.

4. On a abandonné depuis longtemps la définition de la différentielle au moyen des infiniment petits, telle qu'elle paraît résulter naturellement de ce théorème :

La différentielle d'une fonction $f(x)$ au point x_0 est la partie principale de l'accroissement de $f(x)$ à partir du point x_0. Cette définition est évidemment insuffisante (on sait par exemple que si $f'_{x_0} = 0$ et si $f''_{x_0^2} \lessgtr 0$, la partie principale de l'accroissement de f est la différentielle seconde).

Il y a lieu de le regretter, parce que c'est la définition qui s'est trouvée historiquement et pratiquement la plus intuitive et la plus utile.

Or on peut, en restant rigoureux, retrouver une partie des avantages de la définition précédente en la modifiant ainsi :

Une fonction $f(x)$ est différentiable au point x_0, s'il existe une fonction linéaire $A\,\Delta x$ de l'accroissement de la variable qui ne diffère de l'accroissement de la fonction f à partir de x_0 que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'accroissement Δx de la variable. Et $A\,\Delta x$ est appelée la différentielle de $f(x)$ en x_0.

La condition imposée à $A\,\Delta x$ signifie que la quantité

$$\frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] - A\,\Delta x}{\Delta x}$$

tend vers zéro en même temps que Δx. Et l'on voit ainsi que cette définition est exactement équivalente à la définition rigoureuse ordinaire.

Il pourrait y avoir des avantages pédagogiques à adopter cette forme de définition qui met bien en évidence le fait que la différentielle est une fonction linéaire approchée de l'accroissement de la fonction. Mais c'est pour le cas de plusieurs variables qu'elle possède une supériorité marquée sur la définition ordinaire à laquelle elle ne reste plus équivalente.

5. *Définition.* — Une fonction de plusieurs

variables $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle à mon sens au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ s'il existe une fonction linéaire des accroissements des variables, soit

$$df = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \ldots + L\,\Delta u$$

qui ne diffère de l'accroissement de la fonction f à partir du point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'ensemble des accroissement $\Delta x, \ldots, \Delta u$ des variables. Et l'expression $A\Delta x + \ldots + L\Delta u$ est appelée la différentielle de $f(x, \ldots, u)$ au point considéré.

J'ai laissé, dans ce texte, l'expression un peu vague *infiniment petite par rapport à l'ensemble des accroissements*, parce qu'on peut la préciser de plusieurs façons équivalentes. Dans le cas de trois variables, par exemple, on aurait pu dire *infiniment petite par rapport au vecteur* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, c'est-à-dire par rapport à

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

D'une façon générale, la condition imposée à df signifie que

$$\frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u_0 + \Delta u) - f(x_0, y_0, \ldots, u_0)] - (A\,\Delta x + B\,\Delta y + \ldots + L\,\Delta u)}{\Delta}$$

tend vers zéro avec Δ, Δ désignant l'*écart* des points $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, z_0 + \Delta z)$ et $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$. On peut prendre pour Δ l'une des expressions

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots + \Delta u^2},$$

ou $|\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta u|$; ou encore, on peut prendre pour Δ la plus grande, δ, des quantités $|\Delta x|$, $|\Delta y|, \ldots, |\Delta u|$. Ces trois choix sont équivalents à notre point de vue actuel, comme on le voit immédia-

tement d'après les inégalités

$$\delta \leqq \sqrt{\Delta x^2 + \ldots + \Delta u^2} \leqq \sqrt{n}\,\delta,$$
$$\delta \leqq |\Delta x| + \ldots + |\Delta u| \leqq n\,\delta,$$

qui montrent que les trois expressions considérées sont des infiniment petits du même ordre.

Dans une exposition simplifiée il y aurait lieu de se borner à prendre $\Delta = |\Delta x| + \ldots + |\Delta u|$, comme nous le ferons dans la suite; mais j'ai indiqué cet arbitraire parce qu'il correspond à des définitions différentes dans le Calcul fonctionnel.

Il est important de remarquer que si tous les accroissements sont nuls sauf, par exemple, Δx, les trois expressions se réduisent à $|\Delta x|$.

On peut faire maintenant une remarque essentielle :

Si une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle à mon sens, elle a aussi une différentielle au sens ordinaire (et c'est la même).

En effet, si l'on applique la définition en faisant

$$\Delta y = \ldots = \Delta u = 0,$$

on voit que la quantité

$$\frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0, \ldots, u_0) - f(x_0, y_0, \ldots, u_0)]}{\Delta x} - A$$

tend vers zéro avec Δx. Donc $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ existe et est égal à A; de même pour $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ qui sera égal à B, etc. *Mais la réciproque n'est pas vraie.*

Par exemple, la fonction $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ est partout continue et elle est dérivable en x et en y à l'origine où ses dérivées sont nulles [puisque $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$]. Si elle avait

une différentielle à mon sens à l'origine, on aurait donc

$$\lim \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro, ce qui n'a pas lieu comme on le voit en prenant, par exemple, $\Delta y = \Delta x$.

6. On voit maintenant que la définition précédemment indiquée peut s'énoncer ainsi :

Une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ est différentiable au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si elle admet en ce point des dérivées partielles finies $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_0}$, et *si ces dérivées partielles sont telles que l'on ait*

$$\begin{aligned}(1)\quad & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u_0 + \Delta u_0) \\ &= f(x_0, y_0, \ldots, u_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x_0} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y_0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0} \Delta u_0 \\ &\quad + \varepsilon \{ |\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta z| \},\end{aligned}$$

où ε est une quantité qui tend vers zéro quand

$$|\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta u|$$

tend vers zéro.

C'est la définition même de Stolz, Pierpont et Young, à cela près que ces auteurs remplacent le dernier terme par

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 xy + \ldots + \varepsilon_n \Delta u$$

(où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tendent vers zéro quand $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta u$ tendent simultanément vers zéro) ce qui revient au même. Je dirai donc, à partir de maintenant, *différentielle au sens de Stolz* au lieu de *différentielle à mon sens*.

On observera que la définition de Stolz ajoute à la définition ordinaire l'hypothèse que la formule (1) est

vérifiée. Un cas très général où il en est ainsi est le suivant :

Si une fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et par rapport à y au point (x_0, y_0) et par rapport à l'une des variables en son voisinage et si la fonction et cette dérivée sont continues au point (x_0, y_0) par rapport à l'ensemble des deux variables, la fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0) (VI, 134). Mais la réciproque n'est pas vraie. *Non seulement pour qu'une fonction ait une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0), il n'est pas nécessaire que ses dérivées partielles soient continues en ce point, mais il n'est même pas nécessaire qu'elles existent au voisinage de ce point.*

Si l'on considère d'abord la fonction

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{pour} \qquad x^2 + y^2 \lessgtr 0$$

avec $f(0, 0) = 0$; on voit que cette fonction est partout dérivable.

Mais on a, par exemple,

$$f(x, 0) = x^2 \sin\frac{1}{|x|}, \qquad f(0, 0) = 0.$$

De sorte que

$$f'_x(0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_x(x, 0) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

pour $x > 0$; et par suite

$$\lim f'_x(x, 0) = -1 \pm f'_x(0, 0)$$

quand on prend $x = \frac{1}{2n\pi}$ et que n croît indéfiniment.

Ainsi les dérivées existent, mais ne sont pas continues. Pourtant on a

$$\lim \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro, c'est-à-dire que cette fonction admet à l'origine une différentielle au sens de Stolz (cette différentielle étant d'ailleurs nulle).

Soit ensuite $\varphi(x)$ la fonction de Weierstrass qui est partout continue et qui n'est nulle part dérivable. Envisageons la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\left[\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) - \varphi(0)\right].$$

Elle est dérivable par rapport à x et à y, à l'origine (et ses dérivées y sont nulles). Au contraire, il est facile de voir qu'en un point quelconque non situé sur les axes, la fonction n'est dérivable ni par rapport à x ni par rapport à y. En sorte qu'il est impossible de déterminer autour de l'origine, une région si petite qu'elle soit, dans laquelle $f(x, y)$ soit partout dérivable.

Cependant la fonction admet une différentielle au sens de Stolz à l'origine. On a évidemment

$$\lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\left[\varphi(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) - \varphi(0)\right]}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro.

Si une fonction est différentiable au sens de Stolz en tout point d'un domaine D, elle a nécessairement des dérivées partielles en tout point de ce domaine. Mais ces dérivées ne sont pas nécessairement continues en tout point intérieur à D.

Tel est le cas de la fonction citée précédemment

$$(x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

En résumé, on voit bien que la définition de la différentielle au sens de Stolz se place entre la définition théorique et la définition pratique mentionnées plus

haut. Elle est moins large que la première, moins restrictive que la seconde.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

7. Nous allons montrer maintenant qu'au moyen de cette nouvelle définition, on peut simplifier les énoncés classiques donnés plus haut de façon à les modeler exactement sur ceux qu'on obtient dans le cas d'une variable. Nous nous bornerons généralement au cas de deux variables.

THÉORÈME. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0), elle est en ce point continue par rapport à l'ensemble des deux variables x, y.*

En effet, d'après l'hypothèse, on a en appelant Δf l'accroissement de f

$$\Delta f = \mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y + \varepsilon|\Delta x| + \varepsilon|\Delta y|,$$

ε tendant vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$.

Ce théorème n'est pas vrai si l'on définit la différentielle au sens ordinaire, sans ajouter une hypothèse supplémentaire. Il suffit pour le voir de prendre par exemple ([1]) pour $f(x, y)$ la fonction égale à $\frac{xy}{x^2+y^2}$ quand $x^2+y^2 \neq 0$ et à zéro quand $x^2+y^2 = 0$. Elle a une différentielle, évidemment nulle à l'origine, et pourtant sa valeur $\frac{1}{2}$ pour $y = x \lessgtr 0$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand x^2+y^2 tend vers zéro. Ce seul fait suffit à prouver que si une fonction a une différentielle au sens ordinaire, elle n'en a pas nécessairement au sens de Stolz.

8. THÉORÈME. — *Si des fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$,*

([1]) I, p. 69.

$w(x, y)$ admettent une différentielle au sens de Stolz au point x_0, y_0, et si une fonction $f(u, v, w)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $w_0 = w(x_0, y_0)$, la fonction $F(x, y) \equiv f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$ admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et sa différentielle s'obtient en remplaçant dans la différentielle de $f(u, v, w)$ les accroissements de u, v, w par leurs différentielles (VI, p. 138).

Il s'agit de prouver que dF existe et est égal à

$$f'_{u_0}(u'_{x_0}\Delta x + u'_{y_0}\Delta y) + f'_{v_0}(v'_{x_0}\Delta x + v'_{y_0}\Delta y) + f'_{w_0}(w'_{x_0}\Delta x + w'_{y_0}\Delta y),$$

c'est-à-dire que

$$dF = f'_{u_0}\,du + f'_{v_0}\,dv + f'_{w_0}\,dw.$$

Pour cela, il faut montrer que la quantité

$$P = \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) - (f'_{u_0}du + f'_{v_0}dv + f'_{w_0}dw)}{\Delta}$$

tend vers zéro avec $\Delta = |\Delta x| + |\Delta y|$.

Or par hypothèse l'accroissement de F peut s'écrire

$$\Delta F = \Delta f = f'_{u_0}\Delta u + f'_{v_0}\Delta v + f'_{w_0}\Delta w + \varepsilon|\Delta u| + \varepsilon|\Delta v| + \varepsilon|\Delta w|,$$

où ε tend vers zéro avec $(|\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|)$. Donc

$$P = f'_{u_0}\left(\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right) + f'_{v_0}\left(\frac{\Delta v - dv}{\Delta}\right) + f'_{w_0}\left(\frac{\Delta w - dv}{\Delta}\right) + \varepsilon\,\frac{|\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|}{\Delta}.$$

Les coefficients de $f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}$ tendent vers zéro par hypothèse. Il suffit de montrer que le coefficient de ε

reste borné. Cela résulte de l'inégalité.

$$\left|\frac{\Delta u}{\Delta}\right| \leq \left|\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right| + \left|\frac{u'_{x_0}\,\Delta x + u'_{y_0}\,\Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|}\right|$$
$$\leq \left|\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right| + |u'_{x_0}| + |u'_{y_0}|.$$

Le théorème actuel n'est plus exact si l'on emploie la définition ordinaire de la différentielle sans ajouter d'hypothèses supplémentaires comme au n° 2. Prenons, par exemple, la fonction $f(u, v) = \sqrt{|u, v|}\, L(u^2 + v^2)$ pour $u^2 + v^2 \gtrless 0$, et $f(0,0) = 0$. Elle a des dérivées partielles en u, v même à l'origine où elles sont nulles. En appliquant le théorème précédent à la fonction $F(x) = f(x, x)$, on aurait $F'_x(0) = 0$. Or $F(x) = x\, L\, 2x^2$ pour $x > 0$, $F(0) = 0$ et alors F'_x n'existe pas pour $x = 0$.

On remarquera en outre combien la démonstration du théorème est plus naturelle que la démonstration classique [1] qui utilise un artifice de calcul.

9. Le théorème actuel met en évidence un autre avantage de la nouvelle définition par rapport à la définition ordinaire. C'est que *l'existence de la différentielle au sens de Stolz de la fonction $f(x, y, z)$ est indépendante des axes choisis pour Ox, Oy, Oz, tandis qu'elle ne l'est pas pour la définition ordinaire.* Si l'on opère en effet une subtitution linéaire sur x, y, z, et si la fonction avait primitivement une différentielle par rapport à x, y, z en un point x_0, y_0, z_0, la fonction obtenue aura une différentielle par rapport aux nouvelles variables au point correspondant.

Cela n'a pas lieu pour la définition classique. Si, par exemple, on envisage la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $x^2 + y^2 \lessgtr 0$

---

(1) *Voir* par exemple I, p. 69-70.

avec $f(0, 0) = 0$, cette fonction est partout continue et dérivable ; elle a donc partout la différentielle classique. Prenons pour axes les bissectrices, elle devient $f(x', y') = \frac{x'^2 - y'^2}{2\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ et elle n'est plus dérivable à l'origine.

10. Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ est uniformément continue dans le rectangle limité par les abscisses a, $a + h$ et les ordonnées b, $b + k$ et si elle admet une différentielle au sens de Stolz en tout point intérieur au sens strict à ce rectangle, il existe au moins un nombre θ tel que l'on ait*

$$(2) \quad \begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ & \quad = h f'_a(a + \theta h, b + \theta k) + k f'_b(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

avec

$$0 < \theta < 1.$$

La démonstration classique s'applique ici grâce au théorème précédent.

Mais si, en utilisant la définition ordinaire de la différentielle, on n'ajoute pas d'hypothèse supplémentaire à l'énoncé précédent, on n'a plus, comme nous l'avons vu au n° 9, le droit d'appliquer le théorème précédent. Nous donnerons aussi un exemple prouvant que non seulement la démonstration, mais aussi l'énoncé ne seraient plus exacts. Soit la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $x^2 + y^2 > 0$ avec $f(0, 0) = 0$. Elle est partout continue et dérivable en x et y. Cependant si on lui appliquait la formule (2) avec, par exemple, $a = b = -1$, $h = k = 3$ on obtiendrait :

$$f(a + h, b + h) - f(a, b) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part $a + \theta h = -1 + 3\theta = b + \theta k$. Si l'on avait $\theta = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $a + \theta h = b + \theta k = 0$, les deux dérivées seraient nulles, on obtiendrait $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Si $\theta \neq \frac{1}{3}$, alors les

deux dérivées seraient égales à $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, on obtiendrait

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

11. Théorème. — *Soit* (x_0, y_0, z_0) *un système de solutions de l'équation* $F(x, y, z) = 0$. *Si la fonction* $F(x, y, z)$ *est continue par rapport à l'ensemble des variables* x, y, z *au point* (x_0, y_0, z_0) *et en son voisinage et si elle admet au point* x_0, y_0, z_0 *une dérivée partielle par rapport à* z *différente de zéro, il existe une fonction* $z = f(x, y)$ *bien déterminée dans le voisinage de* x_0, y_0 *qui prend la valeur* z_0 *au point* x_0, y_0, *qui est continue en ce point et qui constitue dans le voisinage de ce point une solution de l'équation implicite* $F(x, y, z) = 0$. *De plus, si* $F(x, y, z)$ *admet une différentielle totale au sens de Stolz au point* x_0, y_0, z_0 *la solution précédente admet elle-même une différentielle totale au sens de Stolz au point* x_0, y_0, *cette différentielle étant donnée par la formule.*

$$df = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)}{F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\Delta x - \frac{F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)}{F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\Delta y.$$

Nous suivrons, pour la première partie de la démonstration, le raisonnement de Young (I, p. 38).

Par hypothèse $F'_{z_0} \lessgtr 0$. Supposons, par exemple, $F'_{z_0} > 0$. Puisque $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F(x_0, y_0, z)$ sera positif pour $z > z_0$, et négatif pour $z < z_0$, si $|z - z_0|$ est inférieur à un nombre η assez petit. Comme $F(x, y, z)$ est continue au voisinage de x_0, y_0, z_0, nous pouvons choisir ce nombre η de sorte que $F(x, y, z)$ soit en outre continue dans tout le domaine D défini par

$$|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| \leqq \eta.$$

Mais soient x_0, y_0, z_1, et x_0, y_0, z_2 deux points de ce domaine. En supposant $z_1 > z_0$, $z_2 < z_0$ on aura $F(x_0, y_0, z_1) > 0$, $F(x_0, y_0, z_2) < 0$ et l'on pourra trouver un cylindre C ayant pour axe la droite $x = x_0$, $y = y_0$ telle que $F(x, y, z)$ soit d'un signe constant sur les sections de ce cylindre par les plans $z = z_1$ et $z = z_2$. On voit alors que, sur toute parallèle à Oz contenue dans le cylindre C, $F(x, y, z)$ est une fonction continue de z qui est positive pour $z = z_1$, négative pour $z = z_2$, donc qui s'annule au moins une fois entre z_1 et z_2. Pour chaque point x, y de la base σ de ce cylindre dans le plan des x, y, il y a donc au point une racine de l'équation $F(x, y, z) = 0$ entre z_1 et z_2; désignons-la par $f(x, y)$. Pour $x = x_0$, $y = y_0$, $F(x, y, z)$ ne s'annule entre z_1 et z_2 que pour $z = z_0$. Donc $f(x_0, y_0) = z_0$. De plus si le point x, y tend vers le point x_0, y_0, $f(x, y)$ restant compris entre z_1 et z_2 a une limite supérieure z'_0 et une limite inférieure z''_0, comprises entre ces limites; et, puisque $F(x, y, z)$ est continue dans le cylindre C, on doit avoir

$$F(x_0, y_0, z'_0) = F(x_0, y_0, z''_0) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $z'_0 = z''_0 = z_0$. Nous avons donc bien une fonction $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

dans le cylindre précédent, telle que $z_0 = f(x_0, y_0)$ et continue pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Supposons en outre que $F(x, y, z)$ ait une différentielle totale au sens de Stolz au point x_0, y_0, z_0. On aura

$$\begin{aligned}F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) & \\ &+ (x - x_0)F'_{x_0} + (y - y_0)F'_{y_0} + (z - z_0)F'_{z_0} \\ &+ \varepsilon\{|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|\},\end{aligned}$$

où ε tend vers zéro quand le point x, y, z tend vers x_0, y_0, z_0.

On pourra choisir le nombre η de façon que $|\varepsilon|$ soit plus petit qu'un nombre fixe ω inférieur à $|F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)|$, quand x, y, z reste dans le domaine D défini plus haut. Alors on aura, pour $z = f(x, y)$,

$$0 = (x - x_0)F'_{x_0} + (y - y_0)F'_{y_0} + [f(x, y) - z_0]F'_{z_0} + \varepsilon\{|x - x_0| + |y - y_0| + |f(x, y) - z_0|\};$$

d'où

$$(4) \quad |f(x, y) - z_0| = \left|\frac{(x - x_0)(F'_{x_0} \pm \varepsilon) + (y - y_0)(F'_{y_0} \pm \varepsilon)}{F'_{z_0} \pm \varepsilon}\right| \leq \{|x - x_0| + |y - y_0|\}\left[\frac{|F'_{x_0}| + |F'_{y_0}| + \omega}{|F'_{z_0}| - \omega}\right]$$

et

$$(5) \quad \frac{\left|f(x, y) - z_0 + \dfrac{F'_{x_0}}{F'_{z_0}}(x - x_0) + \dfrac{F'_{y_0}}{F'_{z_0}}(y - y_0)\right|}{|x - x_0| + |y - y_0|} = |\varepsilon|\left\{1 + \frac{|f(x, y) - z_0|}{|x - x_0| + |y - y_0|}\right\}.$$

D'après (4), le second membre de la dernière égalité est au plus égal à

$$|\varepsilon|\left\{1 + \frac{|F'_{x_0}| + |F'_{y_0}| + \omega}{|F'_{z_0}| - \omega}\right\}.$$

Quand $|x - x_0| + |y - y_0|$ tend vers zéro, nous avons vu que $|f(x, y) - z_0|$ tend aussi vers zéro, donc ε tend vers zéro et par suite le premier membre de (5) tend vers zéro. C'est dire précisément que $f(x, y)$ admet au point x_0, y_0 une différentielle au sens de Stolz, et que cette différentielle est bien celle que nous avions annoncée.

12. *Remarque.* — Si $F(x, y, z)$ est différentiable au sens de Stolz, non seulement au point x_0, y_0, z_0,

mais dans le voisinage de ce point, la solution précédente sera unique dans le voisinage de x_0, y_0, z_0 et elle y sera continue et différentiable au sens de Stolz.

Il suffit évidemment de montrer que la solution est unique. Or on pourra choisir η_1 assez petit pour que, dans tout le domaine D, F'_z existe et soit d'un signe constant. Alors $F(x, y, z)$ ne pourrait s'annuler dans le domaine D pour les mêmes valeurs de x, y, mais pour deux valeurs distinctes de z, sans quoi F'_z s'annulerait dans D.

La démonstration classique (I, p. 99; II, p. 81-85; IV, p. 141; VIII, p. 371) suppose l'existence des dérivées de F au voisinage du point x_0, y_0, z_0 et la continuité de l'une d'elles dans ce même voisinage. Elle est donc moins générale que la précédente.

(*A suivre.*)

[M³1a]

COURBES GAUCHES. SUR LES FORMULES DE CAYLEY ANALOGUES AUX FORMULES DE PLÜCKER;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soient D le genre d'une courbe plane, m son ordre et n sa classe; on peut exprimer en fonction de ces trois nombres les nombres de Plücker (*Revue de Mathématiques spéciales*, août 1898), et l'on a en particulier

$$n + \varkappa = 2(m + D - 1),$$
$$m + \iota = 2(n + D - 1).$$

On peut de même introduire le genre dans les formules de Cayley pour les courbes gauches.

Soit r le rang d'une courbe gauche, c'est-à-dire le

nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée (nombre de plans tangents à la courbe qui passent par la droite); soit m l'ordre de la courbe; soit n sa classe, c'est-à-dire le nombre de plans osculateurs passant par un point donné ([1]). *Les singularités essentielles* de la courbe, celles qui existent généralement sur la courbe ou sur sa polaire réciproque, comprennent les singularités tangentielles qui existent lorsqu'on part d'une équation ponctuelle générale, à savoir des plans surosculateurs (ou stationnaires) en nombre α, et les singularités ponctuelles corrélatives de celles-là, à savoir des points cuspidaux (ou stationnaires) en nombre β. On a les formules

$$n + m = 2(r + D - 1), \tag{1}$$

$$r + \alpha = 2(n + D - 1), \tag{2}$$

$$r + \beta = 2(m + D - 1). \tag{3}$$

On obtient les formules (1) et (2) en considérant l'enveloppe des traces des plans osculateurs sur un plan quelconque, et en appliquant les formules rappelées ci-dessus; D désigne le genre de la courbe plane. Si l'on considère le cône dont le sommet est un point quelconque et qui s'appuie sur la courbe, la seconde des formules rappelées ci-dessus donne la formule (1), D désignant alors le genre du cône qui est par suite égal à celui de la courbe plane, et la première de ces formules donne la formule (3). *On dit que* D *est le genre de la courbe gauche.*

Si l'on prend comme données D, α, β, on aura m, n, r

([1]) Lorsque la courbe est créée par des plans osculateurs, on préfère ordinairement parler de la développable formée par les tangentes; cette façon de faire a l'inconvénient de masquer la corrélation qui existe entre les points de la courbe et ses plans osculateurs (Cf. *Nouvelles Annales*, 1907, p. 436).

par les formules

$$(F)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 4m + 12(D-1),\\ \beta + 3\alpha &= 4n + 12(D-1),\\ \alpha + \beta &= 2r + 8(D-1);\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(F)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 4(m-3) + 12D,\\ \beta + 3\alpha &= 4(n-3) + 12D,\\ \alpha + \beta &= 2(r-4) + 8D;\end{aligned}\right.$$

ces formules montrent que, à l'exception de la cubique gauche, toute courbe gauche algébrique, *si elle n'a pas d'autres singularités que celles considérées ici*, possède des plans surosculateurs ou des points cuspidaux. On verra au n° **2** qu'il n'en est plus nécessairement ainsi lorsque la courbe a des tangentes d'inflexion.

Dans le cas d'une courbe unicursale, $D = 0$, les formules deviennent

$$\begin{aligned} &(1') && m + n = 2(r-1),\\ &(2') && r - \alpha = 2(n-1),\\ &(3') && r - \beta = 2(m-1);\end{aligned}\qquad (D = 0.)$$

$$(F')\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 4(m-3),\\ \beta + 3\alpha &= 4(n-3),\\ \alpha + \beta &= 2(r-4).\end{aligned}\right.$$

il est facile d'avoir directement les formules (2′) et (3′); la première, par exemple, en représentant les plans osculateurs par une équation de la forme

$$at^n + bt^{n-1} + \ldots = 0,$$

où a, b, ... sont des fonctions linéaires des coordonnées (Salmon, t. II, p. 82, avec $\alpha = 0$).

Pour $D = 1$, on a

$$(1'') \qquad m + n = 2r,$$

$$(2'') \qquad r + \alpha = 2n,$$

$$(3'') \qquad r + \beta = 2m; \qquad (D = 1.)$$

$$(F'') \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 4m, \\ \beta + 3\alpha &= 4n, \\ \alpha + \beta &= 2r. \end{aligned} \right.$$

2. Sous une condition unique, la courbe peut avoir une tangente d'inflexion, singularité qui est sa propre corrélative. Le nombre de ces tangentes étant φ, il faut remplacer m par $m + \varphi$ dans la formule (1) si on l'obtient par la première méthode, ou n par $n + \varphi$...; on a ainsi

$$(1) \qquad m + n + \varphi = 2(r + D - 1),$$

et les premiers membres des formules (F) deviennent

$$\alpha + 3\beta + 2\varphi, \qquad \beta + 3\alpha + 2\varphi, \qquad \alpha + \beta + 2\varphi.$$

Pour la quartique de Salmon, on a

$$D = 0, \qquad m = 4, \qquad r = 6;$$

les formules (1), (2) et (3) donnent

$$n = 6 - \varphi, \qquad \alpha = 4 - 2\varphi, \qquad \beta = 0;$$

or on peut avoir $\varphi = 0$, $\varphi = 1$, $\varphi = 2$, comme l'a remarqué Cayley; par $\varphi = 2$, on a donc

$$D = 0, \qquad r = 6, \qquad m = 4, \qquad n = 4, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

de sorte que la courbe n'a alors ni plans surosculateurs, ni point cuspidaux.

3. *Une courbe gauche de genre* 0 *ou* 1, *qui a*

seulement des singularités essentielles, dépend de paramètres en nombre $4m - 2\beta$, *ou* $4n - 2\alpha$, *ou encore*

$$2r - 4(D - 1).$$

a. Dans la représentation par points d'une courbe unicursale qui est générale de son ordre, le nombre des paramètres est

$$4(m + 1) - 1 - 3 \quad \text{ou} \quad 4m,$$

en tenant compte de la substitution possible $t = \frac{at' + b}{ct' + d}$, qui supprime trois paramètres apparents. Si la courbe a des points cuspidaux en nombre β, le nombre des paramètres est $4m - 2\beta$, ou $2r + 4$. C'est ainsi que la question de Salmon dépend de 16 paramètres; la biquadratique nodale dépend seulement de 15 paramètres, à cause du point double.

b. Les coordonnées d'un point d'une courbe de genre 1 sont les valeurs que prennent, pour une même valeur de l'argument, trois fonctions elliptiques aux mêmes périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, ayant les mêmes pôles en nombres m. (*Voir* Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 449.) On peut écrire

$$\frac{x}{A\sigma(u - a_1)\ldots} = \frac{y}{B\sigma(u - b_1)\ldots} = \ldots = \frac{1}{\sigma(u - d_1)\ldots},$$

avec

$$\Sigma a_1 = \Sigma b_1 = \Sigma c_1 = \Sigma d_1.$$

Les deux paramètres ω_1 et ω_2 sont purement fictifs; la possibilité de remplacer u par $mu + n$ permet en effet de donner à ω_1 et ω_2 des valeurs déterminées.

Le nombre des paramètres est donc $4m$ pour une courbe d'ordre 1 qui est générale de son ordre, et $4m - 2\beta$ ou $2r$ lorsque la courbe a des points cuspidaux.

Si la courbe a φ tangentes d'inflexion, le nombre des paramètres est

$$2r - \varphi - 4(D - 1),$$

ou encore

$$m + n - 6(D - 1).$$

[I5a]

ENTIERS IMAGINAIRES;

Par M. Paul LAMBERT.
Élève à l'École Normale supérieure.

Gauss [1] a eu l'idée d'étendre aux imaginaires la notion de nombre entier. Un nombre complexe $a + bi$ sera entier si a et b sont tous deux entiers (positifs ou négatifs). Dans cette théorie, le module joue un rôle beaucoup moins important que son carré $a^2 + b^2$ qui est un entier réel et que Gauss appelle *norme*.

Dans la représentation géométrique classique, aux entiers imaginaires correspondront les sommets d'un quadrillage formé par les parallèles aux axes, dont les abscisses (ou les ordonnées) sont des entiers.

La somme, le produit de deux entiers imaginaires est aussi un entier. Il importe d'ailleurs de remarquer qu'en général une puissance entière complexe d'un nombre entier ne sera pas entière. Par exemple, si a est un nombre réel, on a

$$a^i = e^{i \operatorname{Log} a} = \cos(\operatorname{Log} a) + i \sin(\operatorname{Log} a)$$

et $\cos(\log a)$ et $\sin(\log a)$ ne sont pas entiers en général.

Pour obtenir les points correspondants aux mul-

---

(1) Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum.*

tiples (entiers et complexes) d'une imaginaire z, il suffit évidemment de prendre l'homothétique du quadrillage primitif par rapport à l'origine dans le rapport $|z|$ puis de le faire tourner autour de O d'un angle égal à l'argument de z.

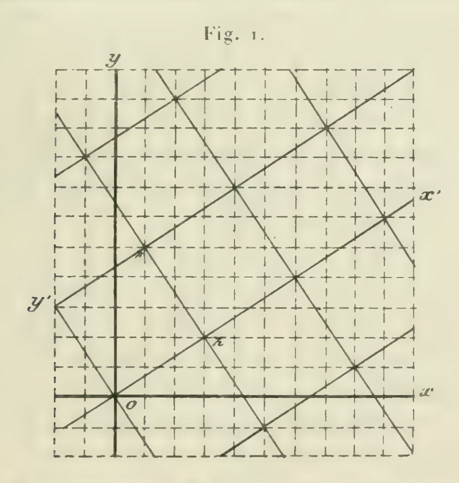
Le point (1,0) viendra au point z. Les équations cartésiennes des droites obtenues, en posant $z = a + bi$, seront

$$ax + by = k|z|^2 \quad \text{et} \quad bx - ay = k'|z|^2$$

k et k' étant des entiers réels de signe quelconque.

On généralise de même la théorie de la division. Ici

Fig. 1.



il faut définir un reste. Soit $a + bi$ à diviser par $c + di$ et $x + yi$ le quotient entier. On devra avoir

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$$= (x + yi) + \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - x\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} - y\right) i.$$

Posons

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - x = u \quad \text{et} \quad \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} - y = v.$$

Nous pouvons toujours déterminer les entiers réels x et y tels que $|u| \leqq \frac{1}{2}$ et $|v| \leqq \frac{1}{2}$. Or le reste de la division est $(c+di)(u+vi)$ puisque l'identité qui exprime la division peut s'écrire

$$a+bi=(x+yi)(c+di)+(u+vi)(c+di).$$

Le module du reste sera égal au module du diviseur $c+di$ multiplié par $\sqrt{u^2+v^2}$, quantité au plus égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc le module du reste ainsi défini est inférieur au module du diviseur. Cette condition peut d'ailleurs être réalisée pour deux ou même quatre valeurs du système (x, y), au cas où les inégalités qui déterminent u et v se transformeraient en égalités. Géométriquement, si la division ne se fait pas exactement, le point $A(a, b)$ tombe à l'intérieur d'un carré du grand quadrillage formé par les multiples de $c+di$. Notre condition revient à prendre pour point représentatif du quotient le sommet de ce carré le plus rapproché de A. Il y aura indétermination si le point A est équidistant de deux ou même quatre sommets. Dans ce cas, il faudra faire une convention : prendre, par exemple, parmi les sommets possibles le plus rapproché de l'origine. Cela se peut toujours : deux sommets consécutifs ne peuvent être équidistants de O sans que la perpendiculaire au milieu du côté qu'ils déterminent soit un axe ox' ou oy', ce qui est absurde; si deux sommets opposés sont équidistants de O, des deux sommets restants, l'un en est évidemment plus rapproché, et c'est celui-là qu'on prendra.

On peut achever comme pour les nombres réels la théorie élémentaire des entiers imaginaires, théorie

qu'esquisse M. Cahen dans une Note à la fin de son Ouvrage sur la *Théorie des Nombres*; et c'est de cette théorie que je vais essayer de tirer quelques conséquences. Un fait important pour la divisibilité est que nous devrons considérer quatre unités différentes : $+1$, -1, $+i$, $-i$. A ce point de vue nous considérerons comme identiques quatre nombres tels que $a+bi$, $a-bi$, $-b+ai$, $b-ai$. Nous pourrions démontrer ainsi sur les entiers complexes tous les théorèmes qu'on démontre pour les entiers réels, en particulier le théorème suivant, dont nous aurons à nous servir : *un entier complexe n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.*

Remarques. — 1° Quand une imaginaire admet certains diviseurs, sa conjuguée admet les diviseurs conjugués. Si elle est première, sa conjuguée l'est aussi.

2° Quand une imaginaire $a+bi$ n'admet pas de diviseur réel, a et b sont premiers entre eux, et réciproquement.

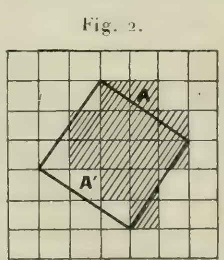
3° Un nombre premier réel peut ne pas être premier au sens imaginaire. Dans ce cas, il est la somme de deux carrés, donc de la forme $4h+1$. Exemple :

$$13 = (2+3i)(2-3i).$$

4° La divisibilité la plus fréquente est la divisibilité par $1+i$. Si $a+bi$ est divisible par $1+i$, a et b sont de même parité. En effet, soit $c+di$ le quotient de $a+bi$ par $1+i$. On a $a=c-d$ et $b=c+d$, et l'on voit que $a-b$ est un multiple de 2. Nous pouvons comme Gauss appeler de tels nombres *semi-pairs* en réservant le nom de *pairs* pour ceux où a et b sont pairs séparément.

Système de restes incongrus. — La congruence étant définie comme pour les nombres réels, je reviens au quadrillage dont les sommets représentent les multiples d'un entier complexe $a+bi$; j'en considère un carré quelconque C que je déplace par une translation arbitraire. Parmi les points représentant *tous* les entiers imaginaires, j'isole l'ensemble de ceux qui tombent soit à l'intérieur de C soit sur un certain de ses quatre sommets (je me suis fixé arbitrairement l'un des quatre), soit sur les deux côtés qui y aboutissent (extrémités opposées non comprises). Je dis que ces points correspondent à un système de restes incongrus par rapport à $a+bi$. En effet, deux des nombres obtenus ne peuvent être congrus sans être, soit deux sommets du carré, et je n'en ai pris qu'un, soit sur deux côtés opposés, et je n'ai pris que deux sommets consécutifs. D'autre part, à tout entier complexe z est congru un nombre de ce système, car si je fais subir à tout le quadrillage des multiples de $a+bi$ la même translation qu'à C, le point correspondant à z tombe dans un autre carré C′ et je n'aurai qu'à prendre dans mon système le point semblablement placé dans C. En particulier, dans ce système de restes incongrus se trouve un et un seul multiple de $a+bi$.

Fig. 2.



Cela posé, je dis que ce système comprend a^2+b^2 nombres. En effet, à chacun de ces points j'adjoins le

carré de côté 1 qui se trouve par exemple en haut et à droite. (Ce sont les carrés couverts de hachures sur la figure. Le sommet particulier de C que j'ai choisi est celui du bas.) L'aire de l'ensemble de ces petits carrés est égale à l'aire du grand, car ce qu'il y a en trop au bord en A, par exemple, manque au bord opposé en A' : il suffit pour le voir d'amener par translation l'un des côtés sur le côté opposé. L'aire du grand carré étant $a^2 + b^2$, il y aura $a^2 + b^2$ petits carrés, donc $a^2 + b^2$ restes incongrus.

RELATIONS ENTRE LES ENTIERS IMAGINAIRES ET LEURS NORMES.

Je dirai, pour abréger, qu'une norme est première quand elle l'est en tant que nombre réel, comme 13, par exemple. Comme une norme n'est jamais première en tant qu'imaginaire, il ne saurait y avoir de confusion.

Théorème I. — *Quand un entier imaginaire n'est pas premier, sa norme n'est pas première.* Ce fait est évident.

Théorème II. — *Quand un entier imaginaire est premier, sa norme est première.* Dans cette hypothèse, en effet, l'égalité

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

représente la décomposition de $a^2 + b^2$ en facteurs premiers. Cette décomposition n'étant possible que d'une seule manière, $a^2 + b^2$ n'admet pas d'autre diviseur, en particulier pas de diviseur réel.

Cela suppose essentiellement a et b tous deux différents de zéro.

De ces deux théorèmes je peux conclure aux réciproques.

Si les deux termes d'un entier complexe sont différents de zéro :

I. *Il est premier si sa norme est première ;*

II. *Il n'est pas premier si sa norme ne l'est pas.*

Quand l'un des deux termes est nul, l'imaginaire se confond, à une de nos quatre unités près, avec son module, d'où les trois cas suivants :

a. Le module n'est pas premier (en tant que nombre réel) } l'imaginaire n'est pas première.

b. Le module est premier
- et somme de deux carrés } l'imaginaire n'est pas première.
- et n'est pas somme de deux carrés } l'imaginaire est première.

Cette correspondance réciproque entre les entiers complexes et leurs normes peut servir, par exemple, dans la recherche du plus grand commun diviseur ou du plus petit commun multiple puisqu'on peut ramener ce problème au problème correspondant sur des nombres réels.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENTIERS IMAGINAIRES.

La théorie précédente permet de simplifier certaines démonstrations d'Arithmétique concernant les nombres réels. On démontre facilement, par exemple, que le produit de deux sommes de deux carrés est aussi une somme de deux carrés ; mais la réciproque offre plus de difficulté.

M. Borel [1] a démontré que :

Si un nombre premier divise la somme de deux

[1] BOREL et DRACH, *Introduction à la Théorie des Nombres et à l'Algèbre supérieure*, p. 105.

carrés sans les diviser tous deux, il est lui-même la somme de deux carrés, ou, ce qui revient au même, *si un nombre divise la somme de deux carrés premiers entre eux, il est lui-même la somme de deux carrés.*

La même démonstration s'applique d'ailleurs au cas de quatre carrés. La voici en quelques mots :

p divise a^2+b^2. Je suppose $p>2$. Soient a' et b' les résidus minima absolus de a et b par rapport à p, c'est-à-dire deux nombres compris entre $-\frac{p}{2}$ et $\frac{p}{2}$ et congrus respectivement à a et à b (mod p). J'ai

$$(1) \qquad a'^2+b'^2 < 2\left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad a'^2+b'^2=pp',$$

p' étant un entier inférieur à p. Si $p'=1$, le théorème est démontré. Sinon, soient $a'-\alpha p'$ et $b'-\beta p'$ les résidus minima absolus de a' et a' par rapport à p'. J'aurai de la même façon

$$(2) \quad (a'-\alpha p')^2+(b'-\beta p')^2=p'p'' \qquad \text{avec} \qquad p''<p'<p.$$

En multipliant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$A^2+B^2=pp'^2p'',$$

A et B contenant p' en facteur, je pose $A=p'a''$, $B=p'b''$, donc

$$(3) \qquad a''^2+b''^2=pp''.$$

Si $p''\neq 1$ je recommence. Les multiplicateurs successifs de p sont des entiers qui décroissent constamment. L'un d'eux finira par être égal à 1 et l'égalité correspondante exprimera p comme somme de deux carrés.

On peut démontrer ce théorème plus simplement

par l'intermédiaire des entiers imaginaires. Je suppose qu'un entier p divise $a^2 + b^2$, et que p, a, b sont premiers entre eux dans leur ensemble. Dans ces conditions p est une somme de deux carrés. En effet, je décompose $a + bi$ en facteurs premiers imaginaires :

$$a + bi = (c + di)\dots(e + fi).g\dots h.ki\dots li, \tag{1}$$

g, h, k, l sont les diviseurs communs à a et à b.

L'égalité correspondante entre les normes est

$$a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)\dots(e^2 + f^2)g^2\dots h^2k^2\dots l^2 \tag{2}$$

et elle exprime la décomposition de $a^2 + b^2$ en facteurs premiers réels, d'après la correspondance établie plus haut. Or comme p ne contient par hypothèse aucun des facteurs $g\dots h$, $k\dots l$, il se réduit à un produit de sommes du genre de $(c^2 + d^2)$, donc à une somme de deux carrés.

L'égalité (2) montre en même temps que *les diviseurs premiers d'une somme de deux carrés sont soit des sommes de deux carrés, soit des nombres quelconques, mais affectés alors d'un exposant pair.*

Remarque. — Le produit de deux sommes de deux carrés $c^2 + b^2$ et $e^2 + f^2$ étant une somme de deux carrés $a^2 + b^2$, si c et d sont premiers entre eux ainsi que e et f, on peut affirmer que a et b sont aussi premiers entre eux; car l'une des quatre égalités suivantes

$$a + bi = (c \pm di)(e \pm fi) \tag{3}$$

est vraie et montre que si $c \pm di$ et $e \pm fi$ n'admetteut pas de diviseur réel (ce qui équivaut à avoir ses termes premiers entre eux), $a + bi$ ne peut en admettre.

Réciproquement, si a et b sont premiers entre eux,

les facteurs premiers que j'ai appelés $g \ldots h$, $k \ldots l$ n'existent pas; les imaginaires $(c + di) \ldots (e + fi)$ de l'égalité (1) n'admettent pas de diviseur réel; donc p, qui est le produit de certaines de ces imaginaires, est, d'après la première partie de cette remarque, la somme de deux carrés premiers entre eux.

Application à la détermination des systèmes d'entiers réels x, y, z tels qu'on ait

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On peut toujours supposer x et y premiers entre eux. Donc z qui divise $x^2 + y^2$ est aussi une somme de deux carrés premiers entre eux. Réciproquement, dans ce cas, z^2 est bien de la forme $x^2 + y^2$. Cela posé, connaissant z, on déterminera tous les systèmes correspondants de x et de y en se basant sur l'égalité

$$(x + yi)(x - yi) = z^2.$$

Or $x + yi$ est un carré parfait, car si un facteur premier $u + vi$ y figurait avec un exposant impair m, $u^2 + v^2$ serait un facteur de z^2, premier en tant que nombre réel, et y figurerait avec un exposant impair, ce qui est impossible ($x - yi$ ne peut contenir de son côté le facteur $u + vi$, sinon $x + yi$ serait divisible par $u - vi$ et admettrait par suite un diviseur réel $u^2 + v^2$). Donc

$$x + yi = (s + ti)^2 \quad \text{et} \quad z = (s + ti)(s - ti).$$

On aura donc tous les systèmes de nombres s et t en décomposant z en ses $2n$ facteurs premiers imaginaires conjugués deux à deux et en combinant de toutes les façons possibles n de ces facteurs, en ayant soin que les n facteurs restants soient bien les conjugués de ceux qu'on aura pris.

Exemples. — Cherchons à retrouver quelques systèmes de nombres x, y, z. Prenons d'abord $z = 5 = 2^2 + 1^2$. Ici $s + ti = 2 + i$; $x + yi = (s + ti)^2 = 3 + 4i$, d'où le système $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Soient encore : $z = 13 = 3^2 + 2^2$; $s + ti = 3 + 2i$; $x + yi = (3 + 2i)^2 = 5 + 12i$:

$$13^2 = 12^2 + 5^2.$$

Continuons :

$$z = 17 = 4^2 + 1^2; \quad s + ti = 4 + i; \quad x + yi = (4 + i)^2 = 15 + 8i:$$

$$17^2 = 15^2 + 8^2,$$

et ainsi de suite. Pour compléter, il faut multiplier tous ces systèmes par des carrés parfaits.

Les théorèmes de Fermat, d'Euler et de Wilson s'étendent aussi au cas des entiers complexes. On trouve l'indicateur (c'est-à-dire le nombre des restes d'un système incongru qui sont premiers avec le module) en employant le procédé dont je me suis servi pour compter le nombre de restes incongrus. L'indicateur d'un nombre $a + bi$ dont les diviseurs sont de la forme $p + qi$, sera

$$N = (a^2 + b^2) \prod \left(1 - \frac{1}{p^2 + q^2}\right).$$

Théorème de Fermat. — Soient $a + bi$ et $q + ri$ deux entiers complexes, $q + ri$ étant premier et ne divisant pas $a + bi$. Le nombre des restes d'un système incongru par rapport à $q + ri$, le multiple du module mis à part, est $q^2 + r^2 - 1$. Le théorème de Fermat s'exprimera donc par la congruence

$$(a + bi)^{q^2 + r^2 - 1} - 1 \equiv 0 \pmod{q + ri}.$$

Si $q + ri$ ne divise pas non plus $a + bi$, le premier membre de la congruence se trouve aussi divisible

par $q - ri$, donc par $q^2 + r^2$:

$$(a + bi)^{q^2+r^2-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q^2 + r^2}.$$

Le théorème de Fermat est donc vrai, non pas seulement d'un module p premier comme nombre complexe, mais encore quand p n'est premier que comme nombre réel (c'est-à-dire admet deux diviseurs conjugués premiers).

Application — I. Prenons

$$a + bi = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i;$$

et pour $q + ri$ un entier imaginaire premier ne divisant pas $1 + i$, donc tel qu'on n'ait pas à la fois $q = \pm 1$, $r = \pm 1$. On démontre dans la *Théorie des nombres* que $p = q^2 + r^2$, nombre réel impair, doit être de la forme $4h + 1$. Le théorème devient

$$2^{2h}(\cos h\pi + i \sin h\pi) - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ou

$$2^{2h} \equiv (-1)^h,$$

h étant le quotient de la division de p par 4.

II. Prenons toujours $a + bi = 1 + i$, et pour module un nombre réel p premier en tant qu'imaginaire. p n'est pas une somme de deux carrés : alors il est de la forme $4h + 3$. Le théorème sera alors

$$(1 + i)^{16h^2+24h+8} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Posons $16h^2 + 24h + 8 = 8m$:

$$2^{4m}(\cos 2m\pi + i \sin 2m\pi) = 2^{4m} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$4m$ étant le quotient de la division de p^2 par 2.

Si p est de la forme $4h + 1$, on pose $16h^2 + 8h = 8m$, le résultat est le même.

Nous aurons finalement ce théorème pour les nombres réels :

Soit p un nombre premier. Si p est une somme de deux carrés et si j'appelle h le quotient de la division de p par 4, 2^{2h} est congru à $(-1)^h$, (mod p). Si p n'est pas une somme de deux carrés et si j'appelle k le quotient de la division de p^2 par 2, 2^k est congru à 1 (mod p).

Exemples. — I. Prenons par exemple $p = 4^2 + 1^2 = 17$. Ici $h = 4$; 2^8 ou 256 doit être congru à 1 (mod 17). Or $255 = 17 \times 15$.

Soit encore

$$p = 5^2 + 2^2 = 29.$$

Ici $h = 7$: 2^{14} ou 16.384 doit être congru à -1 (mod 29). Or

$$16385 = 29 \times 565.$$

II. Soit $p = 7$; on a

$$k = 24 \quad \text{et} \quad 2^k = 2^{24} = 16777216.$$

On a bien

$$16777215 = 7 \times 2396745.$$

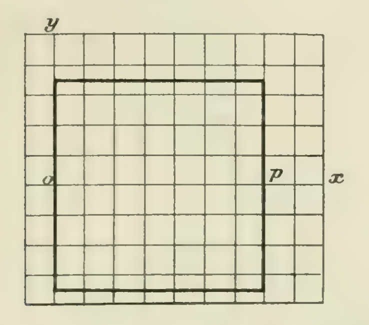
Théorème de Wilson. — Il s'énonce ainsi : le produit de tous les nombres d'un système incongru par rapport à un module premier p (les multiples du module mis à part) est congru à -1 (mod p).

Application. — Je considère un entier réel positif p, premier en tant qu'imaginaire, et je cherche le système de restes incongrus contenus dans un carré de côtés parallèles aux axes et dont l'origine et le point représentatif de p occupent les milieux de deux côtés opposés. Un tel système est formé :

1° Des $p - 1$ points situés sur ox;

2° De tous les points situés à l'intérieur du carré et sur oy, à part le point o. Ces points sont deux à deux

Fig. 3.



symétriques par rapport à ox. Les produits des imaginaires correspondantes sont des sommes de deux carrés. D'où le théorème :

Soit p un nombre premier non somme de deux carrés. Le produit par $(p-1)!$ *de toutes les sommes obtenues en ajoutant le carré d'un nombre inférieur à p au carré d'un nombre inférieur à* $\frac{p}{2}$ *est congru à* $-1 \pmod{p}$.

Dans ce produit, il faut évidemment laisser de côté la somme $o^2 + o^2$.

[C2b]

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES;

Par M. Henri DUBOIS.

Soit à trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$dF = P\,dx + Q\,dy.$$

P et Q étant deux fonctions données des deux variables x et y seulement.

Le problème ne diffère pas de celui-ci :

Trouver F (x, y) telle que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= P, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= Q. \end{aligned} \right.$$

Je rappelle d'abord que :

(α). Deux fonctions qui ont même dérivée partielle par rapport à une même variable ne sauraient différer que d'une fonction ne dépendant pas de cette variable.

En particulier, deux fonctions répondant à la question ne diffèrent nécessairement que d'une constante.

Pour que les conditions (1) soient remplies il faut d'abord que

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je dis que cette condition est suffisante d'une part pour que F existe et, d'autre part, pour que sa recherche se ramène à celle de deux quadratures.

En effet, supposons-la satisfaite. Soit F_1 une fonction telle que

$$(3) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} = P.$$

Une telle fonction s'obtiendra en prenant une primitive quelconque de la fonction P où y sera regardé comme une constante. Si F existe, d'après la propriété (α),

$$F = F_1 + \varphi(y).$$

Je dis qu'il est possible de déterminer $\varphi(y)$ de façon que les deux conditions (1) soient remplies.

Comme la première l'est, il suffit d'avoir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q. \tag{4}$$

Or la dérivation par rapport à y de (3) donne, eu égard à (2),

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} Q.$$

Alors, toujours d'après la propriété (α),

$$Q - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \psi(y)$$

et la condition (4), qui reste à satisfaire, s'écrit

$$\frac{d\varphi}{dy} = \psi(y),$$

$$\varphi = \int \psi(y)\,dy.$$

La démonstration s'étend aisément au cas d'un nombre quelconque de variables.

Remarque. — Cette démonstration jouit, me semble-t-il, de deux avantages :

1° Elle n'introduit dans la recherche de F que des intégrales indéfinies, tandis que la méthode classique exige que l'on place, avec soin, les limites de chaque intégration, et sur le signe $\int$, et dans les fonctions à intégrer ;

2° Elle n'utilise nullement la dérivation sous le signe $\int$ et, à cause de cela, pourrait entrer aisément dans le programme de Mathématiques spéciales où elle mettrait de l'unité dans les méthodes d'intégration des équations différentielles du premier ordre.

CORRESPONDANCE.

M. **M.-F. Egan**. — M. Haag a donné récemment dans les *Nouvelles Annales* la formule sommatoire suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}$$
$$= -\sum_{i=1}^{p} A_i \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a_i}\right),$$

les a_i étant des entiers positifs, tous différents, et $P(n)$ un polynome en n dont le degré ne dépasse pas $p-2$. Les A_i sont les coefficients de décomposition en fractions partielles; ainsi

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x+a_1)\ldots(x+a_p)} = \sum \frac{A_i}{x+a_i}.$$

La démonstration de M. Haag s'appuie sur le théorème d'Abel. Voici une démonstration plus élémentaire, qui donne en même temps la somme d'un nombre fini de termes de la série. Rappelons que

$$\sum_i A_i = 0.$$

Si l'on retranche du second membre de l'identité

$$\sum_{n=1}^{m} R(n) = \sum_i A_i \left(\frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+m}}\right)$$

la quantité nulle

$$\sum_i A_i \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right),$$

(1) Numéro d'avril 1912.

on trouve

$$\sum_{n=1}^{m} \mathrm{R}(n) = \sum_{i} \mathrm{A}_i \left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m+a_i} \right)$$
$$- \sum_{i} \mathrm{A}_i \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a_i} \right).$$

Voilà la somme des m premiers termes de la série $\Sigma\, \mathrm{R}(n)$. En faisant tendre m vers l'infini, on trouve la formule de M. Haag.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad (x - y)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x)\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

1° *Démontrer que parmi les surfaces intégrales il y a une infinité de surfaces, dépendant d'une constante arbitraire, qui sont de révolution autour de* Oz ;

2° *Intégrer l'équation. Déterminer une surface intégrale par la condition qu'elle contienne la parabole qui a pour équations*

$$y = 0, \qquad z = x^2.$$

3° *Par un point* M *de coordonnées x, y, z, autre que l'origine, passe une courbe caractéristique* C *de l'équation* (1) *et une seule. Déterminer, en fonction de x, y, z, les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe au point* M, *l'équation du plan osculateur en* M *à la même courbe et le rayon de courbure de la courbe au point* M ;

4° *Démontrer que les caractéristiques sont des hélices.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2(x-1)\frac{dy}{dx}-2y=\frac{2}{x+1}$$

sachant que l'équation sans second membre admet une solution particulière de la forme $Ax+B$, *où* A *et* B *sont des constantes qu'on déterminera.* (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Qu'appelle-t-on intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire*

$$f(x, y, z, p, q)=0.$$

Montrer comment on peut déterminer une pareille intégrale.

Comment obtient-on l'intégrale générale de l'équation lorsqu'on connaît une intégrale complète?

2° *Application : Intégrer l'équation*

$$k^2(p^2+q^2)-z^2=0,$$

où k *désigne une constante donnée.*

3° *Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, démontrer que parmi les surfaces intégrales de cette dernière équation il y a une infinité de surfaces de révolution autour de* Oz, *et déterminer ces surfaces.*

Épreuve pratique. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(\alpha-\beta)x+\beta y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\beta x+(\alpha+\beta)x,$$

où α *et* β *désignent deux constantes données.*

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — *Résoudre l'équation aux différentielles totales*

$$(y^2-x^4)\,dz+(3x^2yz^2-2x^3z-y^2)\,dx$$
$$-(x^3z^2+y^2z-2xy)\,dy=0.$$

On cherchera une solution particulière de la forme

$$z = \varphi(y)x^m,$$

où φ est une fonction de y seulement.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_C \frac{\cot \pi z}{z(z+1)}\,dz,$$

le contour C du plan des $z = x + yi$ étant formé :

1° *De la droite $y = 1$, $x \geq \frac{1}{2}$ parcourue depuis $x = +\infty$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$;*

2° *Du segment de droite AB, $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$;*

3° *De la droite $y = -1$, $x \geq \frac{1}{2}$ parcourue de B à $x = \infty$.*

(Juillet 1911.)

Nancy.

I. *Établir l'existence des deux périodes de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

II. *On considère la fonction de x*

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,d\alpha.$$

1° *Démontrer que l'on a*

$$xy = 2(n+1)\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha\,d\alpha.$$

2° *En déduire que $y(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre indépendante de α et former cette équation;*

3° *Dans l'hypothèse $n = 2$, montrer que l'équation admet*

deux intégrales particulières de la forme P e^{P}, P *et* p *étant des polynômes en* x. *Former l'intégrale générale et calculer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^3}\, d\alpha.$$

4° *Extension des résultats obtenus au cas où* n *est un entier positif quelconque.* (Juin 1910.)

I. *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6y^2 - 6. \tag{1}$$

1° *Former l'intégrale générale de cette équation;*

2° *Montrer qu'il existe deux familles d'intégrales particulières qui s'expriment au moyen de fonctions trigonométriques. Écrire explicitement ces intégrales;*

3° *Appelant* x_0 *une valeur quelconque de* x, *on développera en série de Laurent les intégrales de l'équation* (1) *qui admettent* x_0 *comme pôle et l'on montrera que le développement contient un coefficient arbitraire; on appellera* λ *ce coefficient;*

4° *Laissant* x_0 *fixe, on fera varier* λ. *A toute valeur de* λ *correspond une intégrale de l'équation* (1) *dont les périodes* ω *et* ω' *se trouvent être par conséquent fonctions de* λ; *quelles sont les valeurs de* λ *pour lesquelles les fonctions* $\omega(\lambda)$ *ou* $\omega'(\lambda)$ *deviennent infinies?*

II. *Équation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure en coordonnées curvilignes.*

(Octobre 1910.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = z t \frac{du}{dt} = mu. \tag{1}$$

1° *Donner une expression de l'intégrale générale de*

cette équation. Montrer que pour $m = 2$ l'intégration se ramène à une quadrature.

2° *Quelle relation peut-on établir entre les intégrales de deux équations* (1) *où m prend deux valeurs différentes ayant pour somme 2?*

3° *Appelons* (Γ) *une courbe dont les coordonnées cartésiennes, exprimées en fonction de t, $x = f(t)$, $y = g(t)$, sont deux intégrales de* (1), *réelles et positives pour t réel et positif. Quelle est l'aire balayée par le rayon vecteur* (*issu de l'origine*) *entre deux quelconques de ses positions?*

4° *Construire et discuter les courbes réelles* (Γ) *pour $m = 2$. Quel est le genre des fonctions $u(t)$ correspondantes?* (*On déterminera d'abord le genre de leurs dérivées logarithmiques.*)

Épreuve pratique. — *Soit $y = \wp(x)$ la fonction elliptique de périodes $\omega = 1$, $\omega' = 2i$ qui est infinie à l'origine. Soient, d'autre part,*

$$u(x) = \int^x \frac{\wp(x)}{x}\,dx, \qquad v(x) = \int^x \frac{\wp'^2(x)}{x}\,dx$$

deux fonctions de x infinies à l'origine.

1° *Pour x réel et supérieur à* 100, *calculer à $\frac{1}{100}$ près les différences $u(x+1) - u(x)$, $v(x+1) - v(x)$.*

2° *Appelant ω un nombre quelconque de module* 1, *montrer que la différence $u(\omega x) - u(x)$ reste finie lorsque x augmente indéfiniment par valeurs réelles positives.* (Juin 1911.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *Étant donnée une fonction $P(x, y)$, déterminer une fonction $\lambda(x, y)$ qui satisfasse aux deux équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x}. \tag{2}$$

1° *Montrer que le problème n'est possible que si l'expression*

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}\,dx - \frac{\partial P}{\partial x}\,dy}{1 + P^2}$$

est différentielle exacte et que, si cette condition est satisfaite, on peut obtenir $\log \lambda$ *par des quadratures;*

2° *Effectuer les calculs en supposant* $P = \frac{x}{y}$;

3° *Montrer que si* $\lambda_1(x, y)$ *vérifie les équations* (1) *et* (2), *l'expression*

$$\lambda_1(dy + P)\,dx$$

est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ *qui est une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

II. *Soient* (C) *uue courbe,* (C_1) *la développée de* (C), (C_2) *la développée de* (C_1), *et ainsi de suite,* (C_n) *désignant la développée de* (C_{n-1}). *Soient* M *un point quelconque de* (C) *et* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *les points correspondants sur les courbes* $(C_1), (C_2), \ldots, (C_n)$.

1° (C) *étant définie comme enveloppe des droites (en coordonnées rectangulaires* xOy)

$$x \sin\theta - y \cos\theta = f(\theta),$$

trouver en fonction de O *les coordonnées des points* M, $M_1, \ldots, M_n$;

2° *Déterminer la fonction* $f(O)$ *de sorte que l'angle* MOM_1 *soit droit.*

Vérifier qu'alors le rapport $\frac{OM}{OM_1}$ *reste constant. En déduire que* (C) *et* (C_1) *sont semblables.*

Vérifier que les courbes dont les indices ont la même parité sont homothétiques par rapport à l'origine.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(I) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

2° *Vérifier que l'on a une intégrale particulière de l'équation* (I) *en considérant la surface* (S) *qui, rapportée à des axes rectangulaires, est représentée par l'équation*

$$(\mathrm{S}) \qquad \left(\frac{x - h\sqrt{\frac{z}{c}}}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c},$$

où a, b, c, h désignent des constantes;

3° *Soit* (T) *le solide homogène limité par la surface* (S) *et par les plans* $z = 0$ *et* $z = c$.

Calculer, pour le solide (T) :

1° *L'aire de l'ellipse, section par un plan* $z =$ const.;

2° *Le volume;*

3° *Le moment d'inertie par rapport à* Oz;

en se limitant, pour ce moment d'inertie, au cas particulier où l'on a à la fois

$$h = 0, \qquad b = a.$$

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. x, y, z *désignant les coordonnées d'un point* M *rapporté à trois axes rectangulaires, et k désignant une constante, on pose :*

$$u = x(x + y + z),$$
$$v = y(x + y + z),$$
$$w = z(x + y + z).$$

1° *Le système d'équations différentielles*

$$k\frac{dx}{dt} = u,$$

$$k\frac{dy}{dt} = v,$$

$$k\frac{dz}{dt} = w$$

définit la position au temps t du point M(x, y, z) *qui pour* $t = 0$ *avait comme coordonnées a, b, c.*

Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c, t, et inversement a, b, c en fonction de x, y, z, t.

Vérifier que les points qui à l'instant $t = 0$ *se trouvent*

dans un plan

$$(P_0) \qquad a + b + c = \text{const.}$$

se trouvent, à l'instant t, dans un plan

$$(P) \qquad x + y + z = \text{const.}$$

et que, à une ligne (L_0) *située dans le plan* (P_0) *correspond de cette façon une ligne* (L) *située dans le plan* (P), *homothétique de la ligne* (L_0).

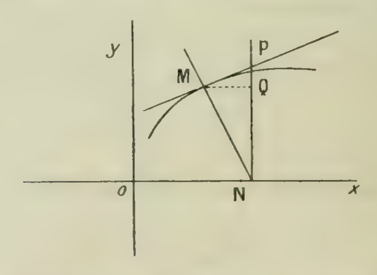
2° *Intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) p + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) q = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vérifier que les points qui, à l'instant $t = 0$, *se trouvaient sur une surface intégrale de cette équation sont, à l'instant t, sur une autre surface intégrale de la même équation.*

II. 1° *Déterminer une courbe satisfaisant à la condition suivante :*

En un point quelconque M *on mène la normale jusqu'à*



sa rencontre en N *avec* Ox; *la parallèle* NP *à* Oy *coupe la tangente en* M *au point* T; *la longueur* NT *doit être égale à une longueur constante* 2 R;

2° *Pour intégrer l'équation différentielle obtenue, on pourra exprimer l'y du point* M, *c'est-à-dire* NQ, *au moyen de l'angle* ω *de la tangente* MP *avec* Oy.

Vérifier que la courbe C *est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon* R *roulant sans glissement sur* Ox.

(Novembre 1910.)

SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE;

Par M. Maurice FRÉCHET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

(*Suite et fin.*)

---

13. Différentiation des intégrales dépendant de plusieurs paramètres. — *Soit $f(x, \alpha, \beta)$ une fonction intégrable par rapport à x dans le domaine* D

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad \beta' < \beta < \beta''.$$

Si $f(x, \alpha, \beta)$ admet une différentielle au sens de Stolz par rapport à α et β en tout point du domaine D *et si cette différentielle reste bornée dans ce domaine (quand les accroissements $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ restent bornés), l'intégrale*

$$F(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta)\, dx$$

a une différentielle au sens de Stolz en tout point du domaine S

$$\alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad \beta' < \beta < \beta'',$$

et cette différentielle est donnée par

$$dF = \Delta\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, dx + \Delta\beta \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\, dx.$$

Nous ne ferons que généraliser l'énoncé donné par par MM. Arzela [1] et Tonelli [2] pour le cas d'un

---

[1] *Sulle serie di funzioni* (*Accademia di Bologna*, 1900, p. 45).
[2] *Su la continuità e la derivabilita d'un integrale* (*Rendiconti dei Livia*, 1910, p. 87).

seul paramètre, cas où les deux définitions de la différentielle coïncident.

Nous supposons que les intégrales soient prises au sens de M. Lebesgue ([1]). On a

$$f'_\alpha(x, \alpha, \beta) = \lim_{\Delta\alpha = 0} \left[\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta) - f(x, \alpha, \beta)}{\Delta\alpha} \right];$$

donc $f'_\alpha(x, \alpha, \beta)$ est une fonction bornée limite de fonctions mesurables. Elle est donc aussi intégrable ([2]). Ainsi les intégrales

$$A(\alpha, \beta) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, dx, \qquad B(\alpha, \beta) = \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\, dx$$

existent. Il reste à montrer que la quantité

$$\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \frac{F(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - F(\alpha, \beta) - \Delta\alpha\, A(\alpha, \beta) - \Delta\beta\, B(\alpha, \beta)}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|}$$

est infiniment petite avec $|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|$. Or on peut l'écrire

$$\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \int_a^b \varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta)\, dx$$

avec

$$\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f(x, \alpha, \beta) - \Delta\alpha\, f'_\alpha(x, \alpha, \beta) - \Delta\beta\, f'_\beta(x, \alpha, \beta)}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|}.$$

Pour toute valeur déterminée de x, cette quantité est infiniment petite quand $|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|$ tend vers zéro. S'il n'en était pas de même de ε, on pourrait trouver une suite de nombres $\Delta\alpha_n$, $\Delta\beta_n$ tels que $|\Delta\alpha_n| + |\Delta\beta_n|$ tende vers zéro et que $|\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha_n, \Delta\beta_n)|$ reste supérieur à un nombre positif fixe.

([1]) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1904, p. 98.

([2]) Lebesgue, *loc. cit.*, p. 111.

Or c'est impossible. On sait en effet que si une suite de fonctions de x, $\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha_n, \Delta\beta_n)$ convergent vers zéro en tout point de a, b et sont bornées dans leur ensemble, leur intégrale dans (a, b) tend vers zéro [1]. C'est ici précisément le cas, car on peut écrire d'après le théorème (10)

$$|\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta)| = \left| \frac{\Delta\alpha[f'_{\alpha_1}(x, \alpha_1, \beta_1) - f'_\alpha(x, \alpha, \beta)] - \Delta\beta[f'_{\beta_1}(x, \alpha_1, \beta_1) - f'_\beta(x, \alpha, \beta)]}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|} \right|$$
$$2P,$$

si P est la borne supérieure finie des dérivées f'_α, f'_β dans D.

Il résulte du théorème précédent que, si α et β sont des fonctions dérivables d'un même paramètre λ, on aura

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\lambda} \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, dx + \frac{d\beta}{d\lambda} \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\, dx.$$

Cette conséquence ne serait plus exacte si l'on supprimait dans l'énoncé les mots, « au sens de Stolz ». En effet, supposons par exemple

$$f(x, \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x \qquad \text{pour} \qquad \alpha^2 + \beta^2 \gtrless 0,$$
$$f(x, 0, 0) \equiv x,$$

on aurait

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{b^2 - a^2}{2}$$

pour $\alpha^2 + \beta^2 \gtrless 0$ et

$$F(0, 0) = 0.$$

La fonction $f(x, \alpha, \beta)$ a bien des dérivées partielles en α, β quels que soient α, β; il est facile de voir que ces dérivées

(1) Lebesgue, *loc. cit.*, p. 114.

partielles restent en valeur absolue inférieures à 2 quels que soient α, β. On devrait donc avoir

$$(1)\quad \frac{d}{d\lambda}F(\lambda,\lambda) = \int_a^b f'_\alpha(x,\lambda,\lambda)\,dx + \int_a^b f'_\beta(x,\lambda,\lambda)\,dx.$$

Or

$$F(\lambda,\lambda) = |\lambda|\left(\frac{b^2-a^2}{\sqrt{2}}\right),$$

qui n'est pas dérivable pour $\lambda = 0$.

14. Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point $(x_0 y_0)$, la surface $z = f(x, y)$ admet en ce point un plan tangent unique non parallèle à Oz et dont l'équation est*

$$(\mathrm{T})\qquad z - z_0 = (x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0}$$

et réciproquement.

1° Considérons une courbe l du plan des x, y qui passe par le point (x_0, y_0) et y admet une tangente dont j'appelle les cosinus directeurs $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Cette courbe est la projection d'une courbe L de la surface, qui passe au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Je vais démontrer : I° que L a une tangente au point considéré; II° que cette tangente est dans le plan T.

Soient en effet $x_0 + h$, $y_0 + k$, $f(x_0 + h, y_0 + k)$ les coordonnées d'un point M de L. Les cosinus directeurs de la droite MM_0 sont *proportionnels* aux quantités

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}},\qquad \beta = \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

$$\gamma = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

D'après l'hypothèse, cette dernière quantité peut

s'écrire

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} f'_{x_0} + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} f'_{y_0} - \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\sqrt{h^2+k^2}$. Lorsque h^2+k^2 tend vers zéro, les trois quantités α, β, γ tendent vers

$$\cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad \cos\varphi f'_{x_0} - \sin\varphi f'_{y_0},$$

ce qui démontre à la fois les deux propriétés annoncées.

Il en résulte, d'une part : que si une courbe L tracée sur la surface passe en M_0 et y admet une tangente, cette tangente est dans le plan T; d'autre part que toute droite D du plan T passant par M_0 peut être considérée comme la tangente en M_0 à une courbe tracée sur la surface, par exemple, d'une courbe quelconque dont la projection sur xOy est tangente à la projection de D au point correspondant.

Ce sont ces propriétés qu'on exprime en disant que T est le plan tangent à la surface en M_0, c'est-à-dire le lieu géométrique des tangentes en M_0 des courbes tracées sur la surface, et passant par M_0.

Le théorème actuel, lui aussi, est inexact quand on y comprend la différentielle au sens ordinaire, sans ajouter d'hypothèses supplémentaires comme au n° 2. On le voit par exemple pour la surface $z = y\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}$ avec $z = 0$ pour $x^2+y^2=0$. A l'origine les dérivées partielles sont nulles. Il devrait donc y avoir à l'origine un plan tangent unique qui serait xOy. Or cette surface est évidemment un cône de sommet o. Les génératrices sont des tangentes qui ne sont pas toutes dans xOy.

2° Réciproquement, si la surface $z = f(x, y)$ admet un plan tangent non parallèle à Oz au point (x_0, y_0, z_0), la fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de

Stolz pour $x = x_0$, $y = y_0$. Et en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

l'expression de la différentielle sera

$$df = p\,\Delta x + q\,\Delta y.$$

Il s'agit de démontrer que la quantité

$$\Delta f - df \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - p\,\Delta x - q\,\Delta y$$

est un infiniment petit par rapport à $|\Delta x| + |\Delta y|$, ou, ce qui sera plus commode ici, à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, quel que soit n, on puisse trouver des accroissements h_n, k_n, vérifiant à la fois

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{h_n^2 + k_n^2} < \dfrac{1}{n} \\ \text{et} \\ \dfrac{|f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) - f(x_0, y_0) - ph_n - qk_n|}{\sqrt{h_n^2 + k_n^2}} > \varepsilon. \end{array} \right.$$

Soient $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$, les cosinus directeurs de la droite M_0M_n joignant le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au point M_n de la surface correspondant à $x_0 + h_n$, $y_0 + k_n$. On peut considérer $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$ comme les coordonnées d'un point μ_n d'une sphère de rayon 1, et l'on pourra toujours extraire de la suite des points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \ldots$ une suite de points qui tend vers un point déterminé μ.

Autrement dit, en supprimant au besoin de la suite des (h_n, k_n) certains éléments, on pourra supposer que les suites des $\cos\alpha_n$, des $\cos\beta_n$, des $\cos\gamma_n$ tendent respectivement vers trois limites déterminées $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les inégalités (6) continuant à avoir lieu.

Ceci étant, considérons une courbe C du plan des xy passant par les projections des points M_n et de M_0 (par exemple, la ligne polygonale qu'elles déterminent) dans l'ordre $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots, M_0$. Ce sera la projection d'une courbe Σ de la surface qui aura évidemment en M_0 une tangente, de coefficients directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Cette tangente sera donc dans le plan tangent donné, de sorte que

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

ou encore que l'expression

$$P_n = \cos\gamma_n - p\cos\alpha_n - q\cos\beta_n$$

tend vers zéro. Or la quantité

$$Q_n = \frac{f(x_0+h_n, y_0+k_n) - f(x_0, y_0) - ph_n - qk_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}$$

reste par hypothèse en valeur absolue supérieure à ε. D'autre part, elle est égale à $\frac{P_n}{\sin\gamma_n}$ qui tend vers zéro puisque $\sin\gamma$ ne peut être nul.

DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

15. *Différentielle seconde.* — Nous dirons qu'une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle du second ordre au sens de Stolz au point x_0, y_0, si : 1° elle admet une différentielle au sens de Stolz en (x_0, y_0) et dans son voisinage; 2° si cette différentielle $f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$ admet, quels que soient Δx, Δy, une différentielle au même sens au point (x_0, y_0).

Cette deuxième condition revient à dire que f'_x et f'_y ont chacune une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0). Nous écrirons, en remarquant que les nouveaux accroissements de x, y sont indépendants

des premiers,

$$d'f'_x = f''_{x_0^2}\,\Delta' x + f''_{x_0 y_0}\,\Delta' y; \qquad d'f'_y = f''_{y_0 x_0}\,\Delta' x + f''_{y_0^2}\,\Delta' y.$$

De sorte que la différentielle seconde de f a pour expression

$$\begin{aligned} d'\,df &= d'f'_x\,\Delta x + d'f'_y\,\Delta y \\ &= f''_{x_0^2}\,\Delta x\,\Delta' x + f''_{x_0 y_0}\,\Delta x\,\Delta' y + f''_{y_0 x_0}\,\Delta' x\,\Delta y + f''_{y_0^2}\,\Delta y\,\Delta' y. \end{aligned}$$

C'est donc une fonction bilinéaire par rapport à $(\Delta x, \Delta y)$, $(\Delta' x, \Delta' y)$. Je remarque tout de suite que *cette fonction bilinéaire est symétrique; autrement dit* $f''_{x_0 y_0} = f''_{y_0 x_0}$. C'est ce que nous allons prouver. Mais la même méthode de démonstration nous donnera le moyen de calculer la différentielle seconde sans passer par l'intermédiaire de la différentielle première.

Nous emploierons le procédé classique qui consiste à calculer de deux manières la différence seconde de $f(x, y)$. Mais la méthode de démonstration sera sensiblement différente de la méthode ordinaire.

Nous supposons seulement que la différentielle seconde de f existe au sens de Stolz au point x_0, y_0. C'est dire que si l'on écrit pour simplifier cette différentielle sous la forme

$$d'\,df = (A h' + B k')h + (B_1 h' + C k')k,$$

on a

$$\begin{aligned} (7) \quad f'_X(X, Y) = f'_{x_0}(x_0, y_0) &+ A(X - x_0) + B(Y - y_0) \\ &+ \lambda\{|X - x_0| + |Y - y_0|\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad f'_Y(X, Y) = f'_{y_0}(x_0, y_0) &+ B_1(X - x_0) + C(Y - y_0) \\ &+ \mu\{|X - x_0| + |Y - y_0|\}, \end{aligned}$$

les quantités λ, μ tendant vers zéro avec

$$|X - x_0| + |Y - y_0|.$$

ε étant un nombre > 0 arbitraire, nous pourrons choisir un nombre η tel que pour

$$|X - x_0| + |Y - y_0| < \eta$$

on ait

$$|\lambda| < \varepsilon, \qquad |\mu| < \varepsilon.$$

Ceci étant, considérons la différence seconde de f, c'est-à-dire l'expression

$$\Delta' \Delta f = \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0, y_0)$$

avec

$$\varphi(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x, y).$$

Nous supposons que $f(x, y)$ est continue et dérivable en x et en y au voisinage de (x_0, y_0). Si donc h, k sont assez petits, il en sera de même de $\varphi(x, y)$. On pourra écrire

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta' \Delta f &= \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0, y_0) \\ &= \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0 + h', y_0) \\ &\quad + \varphi(x_0 + h', y_0) - \varphi(x_0, y_0) \\ &= k' \varphi'_y(x_0 + h', y_0 + \theta k') + h' \varphi'_x(x_0 + \theta' h', y_0) \end{aligned}$$

avec

$$0 < \theta < 1, \qquad 0 < \theta' < 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= f'_x(x + h, y + k) - f'_x(x, y) \\ &= [f'_x(x + h, y + k) - f'_x(x_0, y_0)] \\ &\quad - [f'_x(x, y) - f'_x(x_0, y_0)], \end{aligned}$$

d'où, d'après (7) et (8),

$$(10) \qquad \varphi'_x(x, y) = A h + B k + \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2.$$

où λ_1, λ_2 sont des valeurs de λ correspondant à

$$\begin{aligned} l_1 &= |x + h - x_0| + |y + k - y_0|, \\ l_2 &= |x - x_0| + |y - y_0|, \end{aligned}$$

et de même pour $\varphi'_y(x, y)$.

Donc, d'après (9),

$$\begin{aligned}\Delta'\Delta f = {} & h'[A\,h + Bk + \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2] \\ & + k'[B_1 h + Ck + \lambda'_1 l'_1 - \lambda'_2 l'_2] \\ = {} & A hh' + (B h' k + B_1 hk') + Ckk' \\ & + h'(\lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2) + k'(\lambda'_1 l'_1 - \lambda'_2 l'_2);\end{aligned}$$

$$(11)\quad \begin{aligned}& |\Delta'\Delta f - (A hh' + Bh'k + B_1 hk' + Ckk')| \\ & \leqq [|h'| + |k'|]\{|\lambda_1||l_1| + |\lambda_2||l_2| + |\lambda'_1||l'_1| + |\lambda'_2||l'_2|\} \\ & \leqq \{|h'| + |k'|\}.4\varepsilon\{|h| + |k| + |h'| + |k'|\},\end{aligned}$$

si l'on prend

$$|h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta,$$

car alors

$$\begin{aligned}& l_1 = |h' + h| + |\theta k' + k| < \eta, \qquad l_2 = |h'| + |\theta k'| < \eta; \\ & l'_1 = |\theta' h' + h| + |k| < \eta, \qquad l'_2 = |\theta' h'| < \eta; \\ & |l| + |l'_1| + |l_2| + |l'_2| \leqq 4\{|h| + |h'| + |k| + |k'|\}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas particulier où

$$h' = k = 0 \qquad \text{et} \qquad h = k' \lesseqgtr 0.$$

On aura

$$|\Delta'\Delta f - B_1 h^2| \leqq 2\varepsilon h^2.$$

D'où

$$\left|\frac{\Delta'\Delta f}{h^2} - B_1\right| \leqq 2\varepsilon$$

pour $2|h| < \eta$. Autrement dit, lorsque h tend vers zéro, on a

$$\begin{aligned}B_1 & = \lim \frac{\Delta'\Delta f}{h^2} \\ & = \lim \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)}{h^2}.\end{aligned}$$

Or si l'on avait calculé d'abord $\Delta\Delta' f$ en permutant h, k avec h', k' puis faisant $h' = k = 0$, on aurait trouvé

que le second membre tend vers B. Donc

$$B = B_1, \qquad f''_{x_0 y_0} = f''_{y_0 x_0} \quad (^1)$$

ou encore

$$d\,d' f \equiv d'\,df.$$

Revenons maintenant au cas général où h, k, h', k' sont quelconques. On aura, d'après (11),

$$\frac{|\Delta' \Delta f - d\,d' f|}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)} \leqq 4\varepsilon + 4\varepsilon\left(\frac{|h'| + |k'|}{|h| + |k|}\right)$$

pour $|h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta$. Or en permutant h, k avec h', k', il est évident que $\Delta\Delta' f$ garde la même valeur $\Delta' \Delta f$, et nous venons de démontrer que

$$dd' f = d'\,df.$$

Donc le premier membre est aussi au plus égal à

$$4\varepsilon + 4\varepsilon\left(\frac{|h| + |k|}{|h'| + |k'|}\right).$$

Comme l'un des deux nombres

$$\frac{|h| + |k|}{|h'| + |k'|}, \quad \frac{|h| + |k|}{|h| - |k'|}$$

est au plus égal à 1, on a donc

$$\frac{|\Delta' \Delta f - d\,d' f|}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)} \leqq 8\varepsilon$$

pour $|h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta$. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet au sens de Stolz une différentielle première au point x_0, y_0*

([1]) Cette première partie de la démonstration se retrouve dans Young, VII, p. 22; la seconde partie me semble nouvelle.

Le résultat de Young est plus étendu qu'une proposition analogue de Schwarz, laquelle suppose l'existence de f''_x *au voisinage* de (x_0, y_0).

et à son voisinage et une différentielle seconde au même sens au point x_0, y_0, la différentielle seconde ne diffère de la différence seconde correspondante de f que d'une quantité infiniment petite par rapport au produit des écarts correspondants $|h|+|k|$, $|h'|+|k'|$, quand on prend pour infiniment petit principal la somme de ces écarts (¹).

Il est remarquable que ce théorème permet de calculer la différentielle seconde quand elle existe sans passer par l'intermédiaire de la différentielle première. Bien mieux, sa réciproque permet même d'assurer dans les mêmes conditions l'existence de la différentielle seconde.

16. Réciproque. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle première au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et en son voisinage, et s'il existe une fonction bilinéaire et symétrique par rapport à deux systèmes d'accroissements des variables [soit $Ahh' + B(hk' + h'k) + Ckk'$] qui ne diffère de la différence seconde correspondante de f que d'une quantité infiniment petite par rapport à $(|h|+|k|)(|h'|+|k'|)$ quand $|h|+|k|+|h'|+|k'|$ tend vers zéro, la différentielle seconde de f existe au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et elle est représentée par cette fonction bilinéaire.*

En effet, par hypothèse, on a

$$\frac{\Delta'\Delta f - [Ahh' + B(kh' + h'k) + Ckk']}{(|h|+|k|)(|h'|+|k'|)} = \rho$$

(¹) On pourra remarquer que notre démonstration subsiste quand on ne suppose pas que df existe au voisinage de x_0, y_0, mais seulement que f a des dérivées partielles dans ce voisinage.

avec

$$|\rho| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta.$$

Prenons en particulier $k' = 0$, on aura

$$\frac{\dfrac{\varphi(x_0 + h', y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{h'} - (\mathrm{A}h + \mathrm{B}k)}{|h| + |k|} = \rho.$$

Si donc, laissant h, k fixes et tels que $|h| + |k| < \eta$ on fait tendre h' vers zéro, le premier membre convergera vers

$$\frac{f'_{x_0+h}(x_0 + h, y_0 + k) - f'_{x_0}(x_0, y_0) - (\mathrm{A}h + \mathrm{B}k)}{|h| + |k|} = \rho_0$$

avec $|\rho_0| \leqq \varepsilon$.

D'après la définition de Stolz, ceci prouve que df'_x (et de même df'_y) existent au point (x_0, y_0) et sont respectivement égaux à $\mathrm{A}h + \mathrm{B}k$, $\mathrm{B}h + \mathrm{C}k$. Autrement dit, la différentielle seconde existe au sens de Stolz et est identique à la forme bilinéaire donnée.

17. *Remarque.* — Si l'on énonce la réciproque en entendant les différentielles première et seconde au sens ordinaire, la démonstration subsiste [1].

C'est le contraire pour le théorème direct. En effet, Schwartz a donné depuis longtemps un exemple d'une fonction

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y},$$

pour laquelle

$$f''_{xy}(0, 0) = 1, \qquad f''_{yx}(0, 0) = -1.$$

---

[1] Le cas particulier où $h' = 0$, $k = 0$ et où la différentielle est prise au sens ordinaire a déjà été obtenu par Betazzi, *Giornale di Matematiche*, t. XXI-XXII, 1883-1884, p. 146. *Voir* aussi Young, VII, p. 22.

La première conséquence de la démonstration se trouve donc inexacte quand on suppose seulement que f'_x et f'_y sont dérivables. Il est alors facile de voir qu'il en est de même du théorème. En effet, avec la définition ordinaire, il faudrait prouver que les deux quantités

$$P = \frac{\Delta' \Delta f - d' df}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)},$$

$$Q = \frac{\Delta \Delta' f - d d' f}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)}$$

tendent vers zéro quand $|h| + |k| + |h'| + |k'|$ tend vers zéro. Or

$$P - Q = (B - B_1)R$$

avec

$$R = \frac{k'h - kh'}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)},$$

et 1° $|R| < 1$; 2° on peut faire tendre

$$|h| + |k| + |h'| + |k'|$$

vers zéro de telle manière que R converge vers n'importe quelle valeur θ donnée à l'avance entre -1 et $+1$. Il est donc impossible, si $B \lessgtr B_1$, non seulement que P et Q tendent vers zéro, mais encore que P et Q aient des limites déterminées.

18. Formule de Taylor. — *Si $f(x, y)$ est une fonction admettant une différence seconde au point x_0, y_0, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) &+ h f'_{x_0} + k f'_{y_0} \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f''_{x_0} + 2hk f''_{x_0 y_0} + k^2 f''_{y_0}) \\ &+ \omega(h^2 + k^2), \end{aligned}$$

où ω tend vers zéro avec $h^2 + k^2$. Procédons comme Young (VII, p. 27).

D'après le théorème du n° 15, la quantité

$$(12)\quad \varepsilon = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0) - hk f''_{x_0 y_0}}{hk}$$

tend vers zéro en même temps que h^2+k^2. Or on a d'autre part

$$f(x_0+h, y_0) = f(x_0, y_0) + h f'_{x_0}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}(f''_{x_0^2} + 2\varepsilon_1),$$

$$f(x_0, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f'_{y_0}(x_0, y_0) + \frac{k^2}{2}(f''_{y_0^2} + 2\varepsilon_2),$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers zéro avec h^2+k^2. En portant ces expressions dans (12), on a

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ h f'_{x_0} + k f'_{y_0} \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f''_{x_0^2} + 2hk f''_{x_0 y_0} + k^2 f''_{y_0^2}) \\ &+ (\varepsilon_1 h^2 + \varepsilon hk + \varepsilon_2 k^2), \end{aligned}$$

et l'on peut, si l'on veut, écrire la dernière parenthèse sous la forme $\omega(h^2+k^2)$, ω étant infiniment petit avec h^2+k^2.

19. *Différentielles d'ordre supérieur.* — On peut généraliser ce qui précède et définir de même les différentielles d'un ordre quelconque.

Une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle d'ordre n au sens de Stolz au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si : 1° elle admet des différentielles au sens de Stolz d'ordre 1, 2, ..., $n-1$ au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ et dans son voisinage; 2° si sa différentielle d'ordre $n-1$ admet, quelles que soient les valeurs des accroissements des variables qui y figurent, une différentielle première au sens de Stolz au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$.

Moyennant cette définition, les théorèmes précédents s'étendent immédiatement au cas général actuel.

EXTENSION AU CALCUL FONCTIONNEL.

20. On dit qu'un nombre $U_{f(x)}$ est une fonctionnelle définie dans le champ C des fonctions continues dans a, b, si à toute fonction continue dans (a, b), $f(x)$ correspond une valeur bien déterminée de $U_{f(x)}$. Telle sont, par exemple, les fonctionnelles

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

maximum de $f(x)$ dans (a, b),

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n).$$

On dit qu'une fonctionnelle U_f est continue dans C, si $U_{f_n(x)}$ tend vers $U_{f(x)}$ quand $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément dans a, b quelles que soient les fonctions continues $f(x)$, $f_n(x)$. Enfin une fonctionnelle U_f est dite distributive dans C si

$$U_{f_1(x)+f_2(x)} = U_{f_1(x)} + U_{f_2(x)}$$

quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ continues dans (a, b). Une fonctionnelle linéaire est une fonctionnelle distributive et continue.

Il s'agit maintenant d'étendre la définition de Stolz. Pour cela, nous nous inspirerons de la condition imposée par M. Hadamard [1] : la variation d'une fonctionnelle doit être une fonctionnelle linéaire.

Si l'on partait de la définition ordinaire de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, on serait amené à généraliser d'abord la notion de dérivée par-

[1] *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 288. Hermann, Paris, 1910.

tielle. Et il faudrait considérer une fonctionnelle comme une fonction d'une infinité de variables. Ce point de vue peut être utile dans certaines questions; mais il ne convient pas bien ici, d'autant que le choix de ces variables est très arbitraire.

Il vaut donc mieux partir de la définition de Stolz, et c'est ici que la modification formelle que j'ai indiquée peut rendre des services [celle qui consiste à remplacer le terme $\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2$ par $\varepsilon[|h| + |h_2|]$ ou $\varepsilon\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ ou $\varepsilon \times$ (le plus grand des deux nombres $|h_1|$, $|h_2|$)]. On n'a plus alors aucune peine à formuler la généralisation indiquée.

Nous dirons qu'une fonctionnelle U_f est différentiable pour la valeur $f_0(x)$ de $f(x)$, s'il existe une fonctionnelle linéaire $A_{\Delta f(x)}$ qui représente approximativement

$$U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0}$$

près de $f_0(x)$. Ceci signifiera que l'expression

$$U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0} - A_{\Delta f}$$

est infiniment petite par rapport à l'écart Δ de

$$f_0(x) - \Delta f(x)$$

et de $f_0(x)$. Si le champ de définition de U_f est celui des fonctions continues dans (a, b) on prendra pour Δ le maximum de Δf dans (a, b); si c'est celui des fonctions de carré sommable, on prendra pour Δ l'expression $\int_a^b [\Delta f(x)]^2 dx$, etc.

[R6bα]

LE CAS RÉGULIER D'INTÉGRATION PAR QUADRATURES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE D'UN SYSTÈME HOLONOME;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

Pour ne pas interrompre les raisonnements, nous commencerons par établir une propriété relative aux formes quadratiques.

Soit Φ une forme quadratique homogène ou non de variables que nous séparerons en deux groupes u_1, u_2, ...; v_1, v_2, ..., forme dont les coefficients peuvent contenir d'autres variables λ_1, λ_2, ...

Considérons les équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v_2} = \beta_2, \qquad \ldots,$$

où les β sont des constantes et qui permettent d'exprimer les v comme fonctions linéaires des u, les coefficients étant des fonctions des λ.

Enfin, soit Ψ la forme quadratique des u à coefficients fonctions des λ qu'on obtient en remplaçant les v, par leurs valeurs tirées du système (1), dans la fonction

$$\Phi - \sum \frac{\partial\Phi}{\partial v} v.$$

ou, ce qui revient au même, dans la fonction

$$\Phi - \sum \beta v,$$

de sorte qu'on a, en vertu des formules (1),

$$(2) \qquad \Psi = \Phi - \sum \beta v.$$

La fonction Ψ contient les u directement et par l'intermédiaire des v, et il en est de même relativement aux λ. Par dérivation on aura donc

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{dv}{du_i} - \sum \beta \frac{\partial v}{\partial u_i}$$
$$= \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} + \sum \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \beta\right)\frac{dv}{di} = \frac{\partial\Phi}{\partial u_i},$$

puisque les $\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \beta$ sont nuls en vertu des équations (1). Le même calcul s'applique aux variables λ; donc :

Les dérivées partielles de Ψ par rapport aux variables u et λ sont les transformées des mêmes dérivées partielles de Φ.

De ce qui précède résulte immédiatement qu'on a

$$\sum u \frac{\partial\Psi}{\partial u} = \sum u \frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

ce qu'on peut écrire

$$\sum u \frac{\partial\Psi}{\partial u} = \left[\sum u \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \sum v \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right] - \sum v \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Appliquons alors le théorème d'Euler en décomposant Ψ et Φ en groupes homogènes. L'égalité précédente deviendra

$$2\Psi_2 + \Psi_1 = 2\Phi_2 + \Phi_1 - \sum v \frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

et, en en retranchant l'identité (2) de définition de Ψ,

$$\Psi_2 - \Psi_0 = \Phi_2 - \Phi_0 - \sum \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \beta\right) v,$$

ou plus simplement, en vertu de la transformation,

$$\Psi_2 - \Psi_0 = \Phi_2 - \Phi_0.$$

Donc :

La fonction $\Psi_2 - \Psi_0$ est la transformée de la fonction $\Phi_2 - \Phi_0$.

De sorte que :

La forme quadratique $\Phi_2 - \Phi_0$ aux variables u, v et qui ne contient pas de termes du premier degré se transforme en une forme quadratique aux variables u qui ne contient pas de termes du premier degré.

2. Supposons qu'un problème de mouvement de système holonome, étant mis en équation au moyen de paramètres convenablement choisis, possède des fonctions génératrices parmi lesquelles il y en a une G satisfaisant à la condition suivante :

Les paramètres se répartissent en deux groupes $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$; les paramètres secondaires b ne figurant dans G que par leurs dérivées b', tandis que les paramètres principaux a y figurent eux-mêmes.

Les équations de Lagrange, qui correspondent aux paramètres b, donnent les intégrales immédiates

$$(3) \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_2} = \beta_2, \qquad \ldots,$$

qui permettent d'exprimer les b' en fonction linéaire des a' à coefficients fonctions des a et l'on en déduira les b'' en fonction des a, des a' et des a''. En portant ces valeurs des b' et des b'' dans le groupe des équations de Lagrange relatives aux paramètres a on obtiendra des équations du second ordre déterminant ces paramètres.

Pour effectuer ce calcul, il faut transformer au moyen des formules (3) les expressions $\frac{\partial G}{\partial a'_i}$ et $\frac{\partial G}{\partial a_i}$. Pour cela, appliquons les propriétés du paragraphe précédent; nous devons considérer la fonction

$$\Gamma = G - \sum \beta b'$$

et y faire la transformation, Γ deviendra une fonction des a et des a', quadratique par rapport aux a' et ses dérivées par rapport aux a' et aux a seront les transformées des mêmes dérivées de G, de sorte que les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial a'}\right) - \frac{\partial G}{\partial a} = 0$$

se transformeront en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a'}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = 0.$$

Donc :

Le système de Lagrange réduit aux inconnues principales est encore un système de Lagrange et sa fonction génératrice est la transformée de

$$G - \sum b' \frac{\partial G}{\partial b'}.$$

Pour compléter la démonstration, il faut montrer que Γ possède la propriété essentielle de la force vive.

On voit immédiatement que Γ_2 se déduit de G_2 en y substituant les valeurs des b' réduites à leurs parties homogènes par rapport aux a', c'est-à-dire données par

$$\frac{\partial G_2}{\partial b'_1} = 0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial b'_2} = 0, \qquad \ldots$$

Une telle substitution dans une fonction essentielle-

ment positive donne évidemment une fonction essentiellement positive, de sorte que Γ possède bien toutes les propriétés caractéristiques d'une fonction génératrice.

3. Supposons, en plus, que la fonction G considérée soit indépendante du temps; cette variable t ne figure pas dans les calculs précédents, donc Γ est aussi indépendante du temps, de sorte que *le système total et le système restreint aux paramètres principaux possèdent simultanément l'intégrale des forces vives.* Mais nous avons vu que

$$\Gamma_2 - \Gamma_0$$

était la transformée de

$$G_2 - G_0.$$

Donc :

L'intégrale des forces vives du problème restreint est la transformée de l'intégrale des forces vives du problème total.

4. Nous conviendrons de dire qu'on est dans *le cas régulier d'intégration par quadratures* si l'on a *une fonction génératrice* G *indépendante du temps et dans laquelle il y a un seul paramètre principal.*

Soient a ce paramètre, b_1, b_2, ... tous les autres qui sont secondaires. Puisqu'on a autant d'intégrales que de paramètres, il est inutile d'écrire les équations de Lagrange; le problème se met immédiatement en équations en écrivant les intégrales premières

$$G_2 - G_0 = h,$$

$$\frac{\partial G}{\partial b'_2} = \beta_1, \qquad \frac{\partial G}{\partial b_2} = \beta_2. \qquad \ldots.$$

Les dernières permettent d'exprimer les b' en fonc-

tion linéaire de a' à coefficients fonctions de a; portant ces expressions dans l'intégrale des forces vives on obtient une équation du second degré en a' dont les coefficients sont fonctions de a et indépendants de t, puisque cette dernière variable, ne figurant pas dans G, ne s'introduit à aucun moment dans les calculs.

Soit

$$Aa'^2 + 2Ba' - C = 0,$$

cette équation en a', telle qu'elle est obtenue en faisant le calcul brutal, sans la multiplier ni la diviser par un facteur quelconque.

Quand on rencontre un problème de cette nature, on constate chaque fois que le coefficient B est nul et le coefficient A essentiellement positif. En réalité il y a là une propriété générale qui résulte facilement de ce que nous avons démontré antérieurement.

Reportons-nous aux équations de Lagrange. Le problème total admet l'intégrale des forces vives

$$G_2 - G_0 = h,$$

donc le problème restreint à l'unique paramètre principal a admet également l'intégrale des forces vives

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = k,$$

laquelle est la transformée de la précédente. Donc, si dans l'intégrale des forces vives du problème proposé on remplace les b' par leurs valeurs tirées des intégrales immédiates on obtient un résultat qui est encore une intégrale des forces vives formée avec une fonction possédant la propriété essentielle de la force vive. Cette fonction étant indépendante de t et relative au seul paramètre est de la forme

$$f(a)a'^2 + 2\varphi(a)a' - \psi(a) \qquad [f(a) > 0];$$

donc la transformée de l'intégrale des forces vives du problème proposé est

$$f(a)a'^2 - \psi(a) = k \qquad [f(a) > 0].$$

Donc :

Lorsqu'on se trouve dans le cas régulier d'intégration par quadratures, le paramètre principal est toujours déterminé par une équation de la forme

$$a'^2 = \mathrm{F}(a),$$

la fonction F *étant obtenue comme quotient de deux fonctions* $\psi(a) + k$ *et* $f(a)$ *dont la seconde est essentiellement positive, de sorte que la discussion du signe de* F *se réduit à celle du signe de* $\psi + k$.

5. Les résultats que j'ai donnés dans un article précédent sur les intégrales de quantités de mouvement [1] permettent, dans bien des cas, de reconnaître *a priori* si un problème de mouvement de système holonome est dans le cas régulier d'intégration par quadratures.

Une intégrale de quantité de mouvement s'exprime d'une façon simple au moyen de la force vive vraie, de sorte que, si cette intégrale est obtenue sous forme immédiate, c'est forcément au moyen de cette force vive vraie ou, quand il y a une fonction génératrice, au moyen de la fonction génératrice primitive, celle qui a pour expression

$$\mathrm{T} + \mathrm{U}.$$

Les intégrales de quantités de mouvement des caté-

---

[1] *Voir* le numéro de mai 1912 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

gories T, R, R′, E, E′ s'aperçoivent sans aucun calcul et c'est aussi sans calcul qu'on reconnaît si elles forment un groupe normal.

Supposons alors qu'un problème de mouvement de système holonome à n paramètres remplisse les conditions suivantes :

1° *Il admet l'intégrale ordinaire des forces vives ;*

2° *Il admet $n-1$ intégrales de quantités de mouvement des catégories* T, R, R′, E, E′;

3° *Ces $n-1$ intégrales de quantités de mouvement forment un groupe normal,*

Qui, toutes, sont vérifiables sans calculs à la seule pection des liaisons et des forces données.

Prenons les paramètres indiqués par les intégrales du groupe normal et employons la fonction génératrice primitive, elle sera indépendante du temps et donnera $n-1$ intégrales immédiates qui seront précisément celles du groupe normal, de sorte qu'on sera dans le cas régulier d'intégration par quadratures. Comme application, nous pourrons citer les problèmes classiques suivants :

Solide homogène pesant de révolution fixé par un point de son axe $n=3$: on a l'intégrale ordinaire des forces vives, l'intégrale R pour la verticale et l'intégrale E pour l'axe de révolution ; or un groupe R, E est toujours normal, donc on est dans le cas régulier d'intégration par quadratures ;

Solide homogène pesant de révolution glissant sur un plan horizontal $n=5$: on a l'intégrale ordinaire des forces vives, les intégrales T pour deux horizontales fixes, l'intégrale R pour une verticale fixe quelconque, l'intégrale R′ pour la verticale du centre

de gravité et enfin l'intégrale E′ pour l'axe de révolution. L'intégrale R ne peut exister dans un groupe normal avec des intégrales T perpendiculaires. Si donc on employait l'intégrale R, elle ne pourrait fournir un groupe normal qu'avec R′ et E′ et ce groupe n'aurait que trois intégrales. Supprimons cette intégrale R et considérons toutes les autres

$$\mathrm{T},\quad \mathrm{T},\quad \mathrm{R}',\quad \mathrm{E}',$$

elles forment un groupe normal de $n - 1 = 4$ intégrales; donc on est dans le cas régulier d'intégration.

Dans cet exemple, on a plus d'intégrales de quantités de mouvement qu'il n'est nécessaire et l'on voit celles qu'il faut choisir pour avoir l'intégration régulière.

6. Nous avons supposé que le problème admettait l'intégrale *ordinaire* des forces vives, parce que c'est, en général, la seule intégrale des forces vives qui soit visible *a priori*. Cependant, il arrive fréquemment, dans le cas de liaisons dépendant du temps, que, sans faire le calcul effectif de T et de U, on reconnaît que ce calcul conduit à des fonctions indépendantes de t; si alors on possède un groupe normal d'ordre convenable d'intégrales T, R, R′, E, E′, on est sûr d'être dans le cas régulier d'intégration par quadratures. Voici une propriété bien simple qui donne des exemples de ce cas :

Soit $\mathfrak{L}$ un problème de mouvement de système holonome, à liaisons indépendantes du temps, qui se trouve dans le cas régulier d'intégration par quadratures, et soit $\mathfrak{L}'$ le problème qu'on déduit de $\mathfrak{L}$ en conservant les mêmes forces données, mais en ajoutant de nouvelles liaisons se traduisant par

des relations linéaires et à coefficients constants entre les paramètres secondaires et le temps. Le problème $\mathfrak{P}'$ *est aussi dans le cas régulier d'intégration par quadratures.*

Soient b_1, b_2, ... les paramètres secondaires du problème $\mathfrak{P}$; effectuons, sur ces paramètres, un changement linéaire à coefficients constants

$$b_1 = \lambda_1^1 c_1 + \lambda_2^1 c_2 + \ldots + \mu^1,$$
$$b_2 = \lambda_1^2 c_2 + \lambda_2^2 c_2 + \ldots + \mu^2,$$

qui permettra d'exprimer les b' en fonction des c' sans que les c y figurent. Si l'on porte ces valeurs des b' dans la fonction génératrice primitive G indépendante des b et de t, elle deviendra fonction de a, de a' (a paramètre principal), des c' et indépendante des c et de t, de sorte qu'avec les nouveaux paramètres c on aura encore l'intégration régulière par quadratures.

Nous pouvons déterminer ce changement de paramètres secondaires de façon que les nouvelles liaisons se traduisent par

$$c_r = \varphi_r t + \varpi_r, \qquad c_{r+1} = \varphi_{r+1} t + \varpi_{r+1}, \qquad \ldots$$

c'est-à-dire par

$$c'_r = \varphi_r, \qquad c'_{r+1} = \varphi_{r+1}, \qquad \ldots.$$

On obtiendra donc la fonction G' du problème $\mathfrak{P}'$ en partant de G et y remplaçant les c'_r, c'_{r+1}, ... par des constantes données à l'avance. Cette fonction G' ne sera plus homogène, en général, par rapport aux dérivées des paramètres restants a, c_1, c_2, ..., c_{r-1}, mais elle sera évidemment indépendante de t et de c_1, c_2, ..., c_{r-1}, de sorte qu'on aura bien l'intégration régulière pour le problème $\mathfrak{P}'$.

Reprenons le problème de Lagrange avec le paramètre principal θ et les deux paramètres secondaires ψ et φ, nous aurons encore l'intégration régulière si nous introduisons la nouvelle liaison

$$\psi = \omega t,$$

de sorte que le problème « mouvement d'un solide homogène pesant de révolution dont l'axe a un point fixe et est assujetti à tourner avec une vitesse constante donnée autour de la verticale de ce point » est certainement dans le cas régulier d'intégration par quadratures, l'intégrale des forces vives étant l'intégrale de M. Painlevé et non l'intégrale ordinaire.

Considérons, comme autre exemple, un point pesant mobile sur un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical. On a évidemment l'intégration régulière. Soient Δ une génératrice variable de l'un des deux systèmes, A le point où elle rencontre l'équateur. On peut définir la position du point M, au moyen de la génératrice variable Δ qui y passe, par la distance MA qui sera le paramètre principal et par l'angle au centre qui fixe la position de A sur le cercle équatorial, angle qui sera forcément le paramètre secondaire, puisque c'est sa variation qui donne la rotation autour de la verticale. Si donc on introduit la nouvelle liaison obligeant cet angle à varier d'une façon uniforme, on aura encore l'intégration régulière avec une intégrale de M. Painlevé. Ainsi le problème « mouvement d'un point pesant sur une droite tournant d'un mouvement uniforme donné autour d'une verticale fixe » est certainement dans le cas régulier d'intégration par quadratures.

7. Pour terminer, faisons quelques remarques rela-

tives au nombre maximum de paramètres des problèmes dont on est assuré *a priori* de pouvoir faire l'intégration par quadratures.

Nous avons vu qu'un groupe normal d'intégrales T, R, R', E, E' était d'ordre maximum 5. Il en résulte immédiatement :

Le cas régulier d'intégration par quadratures ne peut être visible a priori *que pour des systèmes ayant, au plus, six paramètres.*

Si l'on tient compte de ce que le groupe normal d'ordre 5 ne peut être obtenu que dans le cas du solide dont l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution, on voit que :

Le cas $n = 6$ d'intégration régulière par quadratures ne peut se présenter a priori *que pour un solide entièrement libre dont l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution.*

Un système matériel ayant un point fixe et qui n'est pas un solide dont l'ellipsoïde de ce point serait de révolution ne peut fournir de groupe normal d'ordre supérieur à *un*. Si on laisse de côté les systèmes de ce genre ne dépendant que d'un paramètre, problèmes dont l'intégration est fournie par la seule intégrale des forces vives, on voit que c'est seulement dans le cas $n = 2$ qu'on peut reconnaître *a priori* si l'on a l'intégration régulière. C'est le cas le plus défavorable. Par exemple, le mouvement d'un solide ayant un point fixe autour duquel il peut librement tourner ($n = 3$) n'est jamais dans le cas régulier, à moins que l'ellipsoïde du point fixe ne soit de révolution, car alors on peut avoir un groupe normal d'ordre 2 par suite de l'existence possible d'une intégrale E.

SUR UN PROBLÈME DE CHOC;

Par M. M.-L. ZORETTI.

Une circulaire récente de M. Lépine, préfet de police, enjoignait aux agents de police, en cas de refus de la part des chauffeurs d'arrêter leurs autos, de ne pas hésiter à crever leurs pneus à coups de sabre.

Quelques jours après, eut lieu une application de cette circulaire : un agent, pour immobiliser une auto qui fuyait, tirait un coup de revolver sur les pneus. La balle atteignait le but, mais sans pénétrer, ricochait et allait, je crois, blesser un passant.

On peut être étonné de ce résultat : une balle qui à cette distance tue un homme, ne peut pénétrer dans une enveloppe de pneu. Il est pourtant facile d'expliquer pour quelles raisons purement mécaniques le fait n'a rien de particulièrement étonnant.

De quoi dépend en effet le phénomène? D'abord de la force de pénétration de la balle. Or cette force de pénétration dépend surtout de la composante *normale* de la vitesse; et de plus la vitesse dont il s'agit est la vitesse *relative* de la balle par rapport à la roue qui naturellement est supposée en mouvement.

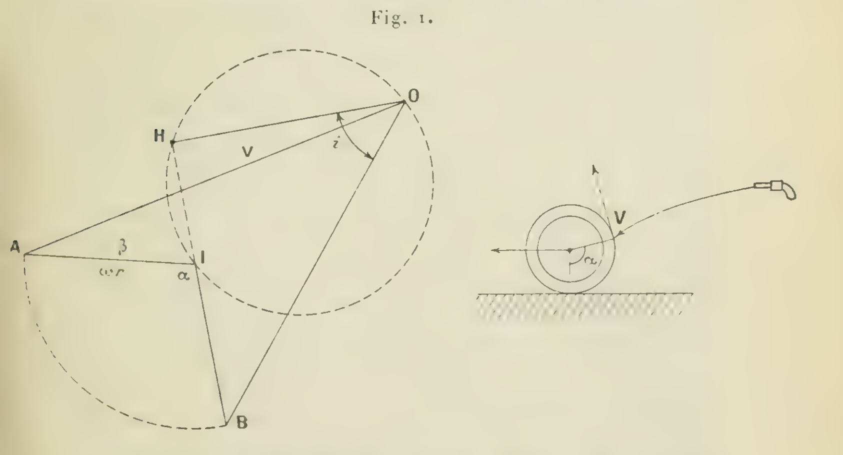
En second lieu, les chances de percer le pneu augmentent en même temps que diminue l'épaisseur de matière qui se trouve devant la balle, dans le sens de la vitesse relative. Si l'on appelle e l'épaisseur de l'enveloppe et i l'angle d'*incidence*, angle de la vitesse relative avec la normale, la balle rencontre devant elle une épaisseur de matière égale à $\frac{e}{\cos i}$.

On voit donc que le phénomène dépend surtout de la vitesse relative et de son inclinaison sur la normale. Proposons-nous donc de construire le vecteur vitesse relative.

Nous supposons qu'on tire *de derrière* sur le pneu dans la direction V qui fait avec l'horizon l'angle β. Plus exactement, nous appelons V et β la vitesse de la balle et son inclinaison au moment où elle atteint la roue. En réalité V est inférieur à la vitesse initiale de la balle et β est supérieur à l'inclinaison de l'axe du canon.

La roue roule sans glisser sur le sol, elle est animée des deux vitesses : vitesse de translation du châssis et vitesse de rotation autour de son axe. Ces deux vitesses sont respectivement : ω pour la vitesse angulaire

Fig. 1.



et ωr pour la translation. Naturellement, on suppose $V \cos \beta > \omega r$, sans cela le projectile n'atteint pas le pneu.

Sur la figure 1 à gauche, on a construit la vitesse relative OB en ajoutant à la vitesse absolue $OA = V$

la vitesse AI horizontale et égale à $-\omega r$ et la vitesse IB égale aussi à ωr et parallèle (avec le sens contraire) à la vitesse linéaire de rotation du point M. Nous déterminons ce point M par l'angle $\alpha = \text{AIB}$ compris entre O et π.

Comme IB donne la direction de la tangente, il est facile de construire la composante tangentielle HB et la composante normale OH de la vitesse relative. Nous avons également en HOB l'angle d'incidence de la vitesse relative.

Rien n'est plus facile que d'appliquer à cette figure le calcul et d'en déduire les expressions de OB, OH, i en fonctions des données V, ωr, α et β. Sur ces formules, on étudiera sans peine l'influence des angles α et β. Par exemple, en projetant sur OH le vecteur OB et le contour OAIB on obtient

$$\text{OH} = \text{V} \sin(\alpha - \beta) - \omega r \sin \alpha.$$

Mais il est encore plus facile de continuer géométriquement l'étude. Le lieu du point H quand α varie seul est le cercle de diamètre OI. Le maximum de OH pour une valeur donnée de β correspond donc à la position OI de OH, c'est-à-dire au cas où le point atteint est l'extrémité du rayon parallèle à OI. Faire varier β, c'est maintenant, dans le triangle OIA, laisser fixes les deux côtés OA et IA et faire varier leur angle. Le maximum de OI correspond donc au cas où $\beta = 0$; OI est alors égal à $\text{V} - \omega r$.

Il y a encore à tenir compte de l'épaisseur $\frac{e}{\cos i}$. On peut, par exemple, supposer que le maximum d'effet utile correspond au maximum de $\frac{\text{OH} \cos i}{e}$, c'est-à-dire de $\text{OH} \cos i$ ou mieux de $\text{OH}^2 \cos i$. Il est très facile de mettre en évidence sur la figure ces expressions. La

première est la projection de OH sur OB. Son étude revient au problème suivant : On donne deux cercles, l'un de diamètre OI, l'autre de centre I. On fait pivoter une droite autour de I. Elle coupe les deux cercles aux points H et B; étudier les variations de la projection de OH sur OB. Pour le deuxième problème, il faut étudier les variations du produit de OH par sa projection sur OB.

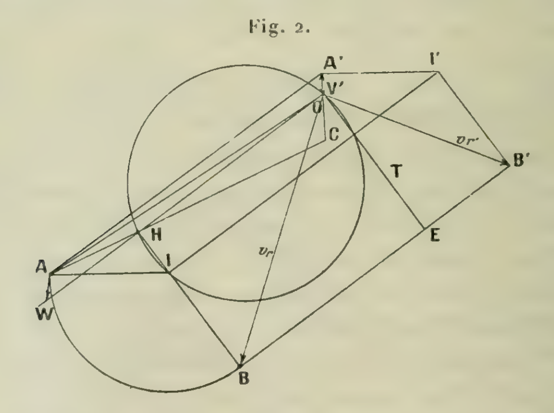
Je n'insiste pas sur ces calculs ou constructions, qui sont bien élémentaires, et je me borne à tirer les conséquences pratiques de l'étude de la force de pénétration proprement dite. Nous avons reconnu que le cas le plus avantageux correspond à $\beta = 0$, α étant égal à $\frac{\pi}{2}$. Pour être dans ce cas, il faudrait donc se placer très bas, viser légèrement au-dessus de l'horizon de façon à atteindre horizontalement le point de l'enveloppe à tangente verticale. Dans ce cas, on aurait une vitesse normale égale à $V - \omega r$, mais la vitesse relative serait inclinée d'un angle dont la tangente est $\frac{\omega r}{V - \omega r}$.

Voyons quelles peuvent être les données numériques : pour une vitesse de l'automobile de 30^{km} à 60^{km} à l'heure, ωr sera compris entre 10^m et 15^m à la seconde environ. Quant à V, je n'ai pas de renseignements sur la valeur à lui attribuer. Elle est évidemment bien plus considérable, 100^m peut-être, au moins pour le tir à très faible distance, mais il faut remarquer qu'à une demi-portée de distance, la vitesse n'est plus qu'environ la moitié de la vitesse initiale (au moins si l'on admet que les choses se passent pour le révolver comme pour les armes à grande vitesse). De plus, l'auto avance pendant le trajet de la balle, ce qui augmente la distance à franchir. Enfin et surtout, la trajectoire s'incurve assez vite et, comme on le voit sur la figure 1, pour peu que

le point atteint soit voisin du point à tangente verticale ou même au-dessous (α aigu), la composante OH devient vite faible et son obliquité est grande. Il ne faut donc nullement s'étonner de voir la composante utile devenir insuffisante pour la pénétration. C'est surtout ce résultat qualitatif que j'avais en vue.

Ricochet. — Une question intéressante est celle du ricochet de la balle dans le cas où elle ne pénètre pas suffisamment. Une construction géométrique nous donnera sans peine la vitesse absolue du ricochet ; nous partons de l'hypothèse de Newton : conservation de la composante tangentielle de la vitesse relative ; multiplication par k (inférieur à 1) de la composante normale, avec changement de sens. De plus, nous négligeons le frottement pendant le choc. La figure 2 montre

Fig. 2.



la construction. Soit OB la vitesse relative de composantes tangentielle HB et normale OH. La composante normale de la vitesse relative après le choc est

$$EB' = k . EB.$$

D'où en OB' la vitesse relative $V_{r'}$, après le choc. En

lui ajoutant la vitesse B'I' de la rotation et celle I'A' de la translation, on a en OA' la vitesse absolue V' après le choc.

Remarquons que la figure B'I'A' dérive de BIA par la translation $II' = BB' = (k+1)$ HO. On peut donc réduire la construction du point A', seul intéressant, à la suivante : mener AA' parallèle à HO et égal à $k+1$ fois ce vecteur HO. Le calcul de OA' est dès lors très simple : il se ramène au calcul du triangle OAA' où l'on connaît deux côtés et un angle. Mieux vaut encore que ce calcul une construction géométrique. En voici deux qui permettent très simplement l'étude de la question :

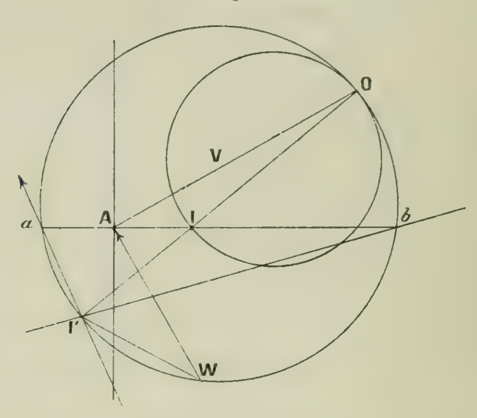
Remarquons que les droites HA et OA' se coupent en un point C dont le rapport des distances à OH et AA' est égal à $\frac{1}{k+1}$. Pour chaque position donnée du point H sur le cercle OI on pourra construire ce point C qui donne la direction COA'.

Mieux encore, portons sur OH le vecteur OW = A'A ; nous aurons en AW un vecteur opposé à la vitesse cherchée ; celle-ci est WA. Or quand, β restant fixe, α varie, W décrit le cercle homothétique du cercle OI par rapport à O, le rapport d'homothétie étant $k+1$. On tracera ce cercle OI' (*fig.* 3). I'W donne la direction de la tangente au point choqué et WA donne la vitesse correspondante du ricochet.

On voit, par exemple, que la balle ricochera vers le *haut* quand W sera sur l'arc de cercle inférieur a I' b, c'est-à-dire quand la tangente aura une direction comprise entre I'a et I'b : c'est ce qui a lieu, par exemple, quand la tangente est perpendiculaire à OI : la vitesse est alors I'A. On peut admettre que le ricochet est surtout dangereux quand il a lieu vers le *haut* et en *arrière;* car si la balle ricoche en avant, elle court

après l'auto et tombe dans l'espace laissé vide derrière l'auto à moins qu'elle ne la dépasse. Au contraire, les ricochets en arrière ont plus de chance d'être dangereux,

Fig. 3.



surtout s'ils sont presque horizontaux. Ce dernier cas a lieu quand W est voisin de a (ricochet en arrière) ou de b (en avant). D'ailleurs le véritable danger vient du ricochet sur les côtés qui tient à ce que le plan de symétrie dont nous avons supposé l'existence n'existe pas en réalité. Mais si cela modifie la trajectoire, cela n'empêche pas nos calculs de s'appliquer. La figure permet d'étudier toutes les particularités de la question ; je me borne à remarquer que les vitesses de ricochet en arrière sont en général plus faibles que les ricochets en avant. Je laisse au lecteur le soin d'étudier l'influence des variations de β ainsi que du coefficient élastique k (voisin de 1 dans le problème étudié).

On peut appliquer des constructions analogues à l'étude du choc contre un obstacle en translation. Voici quelques applications de ces calculs : chasse, choc contre une courroie de transmission, etc. Des

vérifications expérimentales sont faciles au moyen, par exemple, d'un petit volant à axe horizontal, sur la jante duquel on fait tomber un corps pesant.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1912).

Composition de Mathématiques élémentaires.

I. *Un contour quadrangulaire gauche* ABCDA *étant circonscrit à une sphère* (S) *de centre* S, *aux points* M, N, P, Q, *on a, en orientant les tangentes* m, n, p, q *de* A *vers* B, *de* B *vers* C, ...,

$$\alpha\overline{AM} = \overline{AQ}, \qquad \beta\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \gamma\overline{CP} = \overline{CN}, \qquad \delta\overline{DQ} = \overline{DP},$$
$$\alpha = \mp 1, \qquad \beta = \mp 1, \qquad \ldots;$$

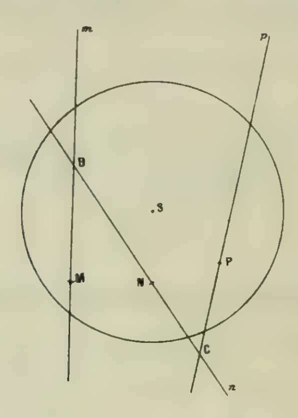
cela conduit à prévoir deux cas distincts : dans l'un des cas, le contour ABCDA *n'est pas quelconque, et l'on a*

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = 0,$$

a, b, c, d *étant les longueurs des côtés; dans l'autre cas, on indiquera une propriété des deux plans* MPN *et* MPQ, *par exemple.*

II. *On suppose donnée la sphère* S. *Soient* m *et* p *deux droites fixes tangentes à cette sphère aux points* M *et* P. *On considère les droites* n *qui s'appuient sur les droites* m *et* p (*points d'appui* B *et* C) *et qui sont tangentes à la sphère* (*point de contact* N). *Ces droites forment deux systèmes* (n) *et* (n'); *on déterminera les surfaces* (Σ) *et* (Σ') *dont elles sont*

les génératrices, les courbes (Γ) *et* (Γ') *qui sont les lieux des points* N *et* N'; *on introduira, si l'on*



veut, l'enveloppe des plans (S, *n*) *et celle des plans* (S, *n'*). *Que peut-on dire des tangentes en* M *et* P *aux deux courbes* (Γ) *et* (Γ')? — *Application aux contours du paragraphe* I.

III. *On suppose maintenant donné le contour* ABCDA, *et l'on cherche les sphères* (S) *tangentes aux quatre côtés.*

On examinera d'abord le cas où l'on veut avoir une sphère (S) *avec points de contact dans un même plan; on montrera* a priori *que, si une telle sphère existe, il doit en exister une infinité. On établira rigoureusement ce fait en projetant, par exemple, la figure sur un plan convenable; on fera connaître le lieu des centres des sphères en question; on indiquera la sphère de plus petit rayon. Quelle est l'enveloppe des sphères* (S)?

On examinera en second lieu le cas où l'on demande une sphère (S) *avec points de contact non dans un même plan. On traitera la question par le*

calcul, en posant

$$\overline{AM} = x, \qquad \overline{BN} = y, \qquad \overline{CP} = z, \qquad \overline{DQ} = t;$$

on fera voir que, pour chaque système de valeurs des inconnues, on a bien une sphère (S). *On classera les solutions en quatre groupes* (1 *et* 1′), (2 *et* 2′), ...

Dans le cas où il existe une série continue de sphères (S), *avec points de contact dans un même plan, que deviennent les solutions isolées, avec points de contact non assujettis à être dans un même plan? Certaines de ces solutions isolées font-elles partie de la série continue de solutions?*

Remarque. — *Soient a, b, c, d les plans perpendiculaires aux plans des angles* A, B, C, D, *menés par les bissectrices de ces angles, et a', b', c', d' les plans analogues menés par les bissectrices des angles extérieurs; on pourra indiquer rapidement le rôle de ces plans au paragraphe* III, *d'abord dans chacune des deux hypothèses $a - b + c - d = 0$, $a + b - c - d = 0$, puis, dans le cas d'un contour quelconque, en considérant, par exemple, les solutions* (1 *et* 1′); *on reviendra sur le résultat obtenu à la fin du paragraphe* III. *Dans les figures qui accompagneront le texte on représentera le plan a par la bissectrice de l'angle* A, ...

Composition de Mathématiques spéciales.

I. *Si, dans une équation du troisième degré*

$$(1) \qquad z^3 - p_1 z^2 + p_2 z - p_3 = 0,$$

le coefficient p_1 est nul, la fonction

$$z_1^2 - z_2 z_3 = z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2$$

non symétrique par rapport aux lettres est équivalente à une fonction symétrique des racines de l'équation. Le cas où $p_1 = 0$ est-il le seul où il existe un polynome homogène du second degré à trois variables qui jouisse de la même propriété?

Le coefficient p_1 n'étant pas nul, former l'équation (2) *qui a pour racines les valeurs que prend la fonction $x^2 + xy + y^2$ quand on y remplace x et y par deux racines quelconques de l'équation* (1). *L'équation* (2) *peut-elle être équivalente à l'équation* (1) *dont on l'a déduite?*

II. *Les médianes d'un triangle* ABC *se coupant en un point* O, *on fait tourner ce triangle de* 60° *autour de* O *dans un sens et dans l'autre; on obtient ainsi deux nouvelles positions* $A'B'C'$, $A''B''C''$ *du triangle* (A' *et* A'' *étant les nouvelles positions du point* A). *Soient* A'_1, A''_1 *les milieux de* BA', BA''; B'_1, B''_1 *les milieux de* CB', CB''; C'_1, C''_1 *les milieux de* AC', AC''; A'_2, A''_2 *les milieux de* CA', CA''; B'_2, B''_2 *les milieux de* AB', AB''; C'_2, C''_2 *les milieux de* BC', BC''. *Montrer que les angles* $A'_1OA''_1$, $A'_2OA''_2$, $B'_1OB''_1$, $B'_2OB''_2$, $C'_1OC''_1$, $C'_2OC''_2$ *ont même bissectrice et qu'il existe sur cette bissectrice deux points* ω', ω'' *symétriques par rapport à* O, *tels que les quadrilatères* $\omega'\omega''A'_1A''_1$, $\omega'\omega''A'_2A''_2$, $\omega'\omega''B'_1B''_1$, ... *soient inscriptibles.*

Démontrer qu'il existe un triangle $A_1B_1C_1$ *homothétique du triangle* ABC *par rapport à* O *et tel que, si l'on prend les inverses* A_2, B_2, C_2 *des sommets* A_1, B_1, C_1, *le pôle d'inversion étant soit* ω', *soit* ω'', *le centre des moyennes distances des points* A_2, B_2, C_2 *est soit* ω', *soit* ω''.

(*On pourra représenter les différents points par*

leurs affixes, rapportées à un système d'axes rectangulaires ayant O *pour origine, et utiliser la propriété indiquée au n°* I.)

III. *On considère les triangles* ABC *variables, tels que les points* ω', ω'' *qui leur correspondent soient fixes et pour lesquels le produit des longueurs des médianes est donné. Trouver le lieu des sommets de ces triangles. (On pourra se borner à construire ce lieu dans le cas où les données sont telles que l'un des triangles* ABC *ait deux sommets confondus.)*

Étant donné un point A *du lieu, construire le triangle* ABC *qui lui correspond.*

Composition sur le Calcul différentiel et intégral.

Les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on donne un cercle* (γ), *d'axe* Oz *de rayon* r *et de cote* $z = h$.

Par un point arbitraire M *du cercle* (γ) *on mène un plan, tangent à ce cercle et dont la position dépend uniquement de la position du point* M *sur ce cercle. Lorsque le point* M *décrit le cercle* (γ), *ce plan enveloppe une surface développable* (S) *dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, soit* ω.

1° *Déterminer la surface* (S) *et la courbe* (C) *section de cette surface par le plan* xOy.

2° *Comment doit-on choisir la fonction* ω *pour que la courbe* (C) *coïncide avec une courbe donnée* (C_1) *définie par son équation cartésienne?*

Montrer que la représentation est possible d'un nombre limité de manières et indiquer à quelles surfaces (S) *correspondent les autres solutions de l'équation différentielle déterminant* ω.

Y a-t-il des courbes (C_1) *exceptionnelles pour lesquelles la représentation par une courbe* (C) *est impossible?*

3° *Comment appliquera-t-on la représentation précédente d'une courbe plane à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire?*

Y a-t-il des équations différentielles exceptionnelles?

Intégrer l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2.$$

Comment peut-on découper, dans le plan xOy, *les courbes intégrales, par déplacement et déformation d'une surface développable* (S)?

Indiquer : des équations du premier ou du second ordre dont l'intégration se ramène aux quadratures, des équations du second ordre dont l'intégrale générale peut être découpée dans le plan xOy *en utilisant le procédé mis en évidence pour l'équation précédente.*

4° *On considère une famille de développables* (S) *dépendant d'un paramètre et sur chacune de ces développables on choisit une courbe déterminée* (σ). *Les courbes* (σ) *engendrent une surface* (Σ) *qu'on peut représenter par les coordonnées de l'un de ses points exprimées à l'aide de deux paramètres.*

Inversement, étant donnée une surface (Σ_1) *par son équation cartésienne, peut-on la représenter de la façon précédente?*

5° *Former l'équation aux dérivées partielles* (E) *déterminant les surfaces orthogonales à une famille donnée et à un paramètre de développables* (S).

6° *Déterminer les développables* (S) *et intégrer*

l'équation (E), *lorsque cette équation* (E) *admet comme solution particulière la surface* (Σ_2), *lieu des arêtes de rebroussement des développables* (S).

La surface (Σ_2) *appartient-elle à l'intégrale générale?*

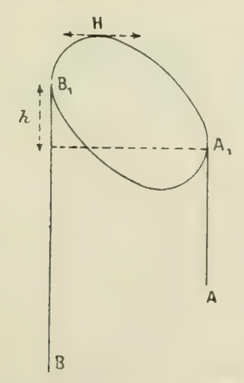
Existe-t-il des surfaces normales aux génératrices des développables (S)? *Le calcul met-il en évidence la génération de ces surfaces en partant de l'une d'entre elles?*

Composition sur la Mécanique.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CABLE A CHEVAL SUR UNE POUTRE.

Un câble pesant flexible et inextensible est à cheval sur une poutre cylindrique horizontale fixe, le long d'une section droite S *supposée convexe.*

Notations. — *On appellera* H *le point le plus haut*



de S, A_1, B_1 *les deux points de* S *à tangente verticale*, B_1 *étant au moins aussi haut que* A_1.

On choisira pour origine des abscisses curvilignes s *sur* S *le point* A_1, *le sens positif étant le sens de* $A_1 H B_1$. *On prendra une verticale ascendante*

comme axe des y et une horizontale orientée dans le sens de la demi-normale extérieure en A_1 *comme axe des* x. *L'angle que fait la demi-normale extérieure à* S *en un point* M *de l'arc* A_1HB_1, *avec* Ox, *sera désigné par* φ *et le rayon de courbure correspondant par* r. *La relation entre* φ *et l'abscisse curviligne* $s = \widehat{A_1M}$ *sera représentée par l'équation* $s = a(\varphi)$. *On appellera* T *la valeur absolue de la tension en un point du câble et* N *celle de la réaction de la poutre sur l'unité de longueur du câble, au même point.*

Données. — *On connaît la longueur* l *de l'arc* $\widehat{A_1HB_1}$, *la longueur* L *du câble, son poids* p *par unité de longueur, enfin la hauteur* $h(\geqq 0)$ *de* B_1 *au-dessus de* A_1. *On suppose la hauteur de* A_1 *au-dessus du sol supérieure à* L, *de sorte qu'on n'aura pas à s'inquiéter du choc sur le sol dans le problème dont l'énoncé suit.*

PROBLÈME.

I. On négligera d'abord le frottement du câble sur la poutre.

1° *On étudiera l'équilibre du câble et sa stabilité.*

2° *En négligeant la résistance de l'air, en supposant qu'à l'instant initial tous les points du câble et leurs vitesses sont dans un même plan vertical et que toute portion libre du câble est verticale et animée d'une vitesse verticale, on montrera que la loi du mouvement s'obtient par des quadratures. On indiquera les principales circonstances qui peuvent se présenter suivant les données initiales.*

En particulier, on déterminera la vitesse que possède le câble au moment où il quitte la poutre, en supposant la vitesse initiale nulle.

On calculera cette vitesse à un décimètre près par seconde en supposant que S est une circonférence de périmètre égal à 1^m *et qu'à l'instant initial le câble a deux portions libres* $AA_1 = l$, $BB_1 = 3l$.

II. On reprendra ensuite la question de l'équilibre en tenant compte du frottement du câble sur la poutre ($f = \tan g\theta$ *étant le coefficient du frottement*).

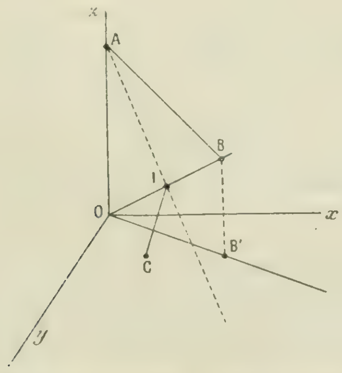
On se contentera d'étudier l'équilibre limite du câble dans le cas où L *est supérieur à* l *et de rechercher, suivant les valeurs de* L, *si dans une position d'équilibre le câble a un ou deux brins libres. (On pourra simplifier en se bornant au cas où* S *est un cercle.)*

En particulier on indiquera si, dans l'application numérique proposée plus haut, le mouvement peut avoir lieu quand f, *au lieu d'être négligeable, est égal à* $\frac{1}{2}$.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soit le trièdre trirectangle* $Oxyz$,



dont l'axe des z *est vertical et dirigé vers le haut. Une*

tige rectiligne OB, *homogène, de masse* $2m$ *et de longueur* $2a$, *est fixée en* O, *d'une part, et attachée en* B, *d'autre part, à un fil* AB, *de longueur* $2a$, *dont l'autre extrémité est fixée en* A, *à la hauteur* $2a$ *au-dessus de* O.

Une seconde tige IC, *de masse* m *et de longueur* a, *est articulée perpendiculairement à la première au milieu* I *de* OB. *Elle peut tourner sans frottement autour de* OB.

On appelle ψ *l'angle de* Ox *avec la projection horizontale* OB' *de* OB *et* φ *l'angle (mesuré autour de* OB) *que fait le prolongement de* AI *avec* IC :

1° *Le système étant lancé dans des conditions initiales quelconques, trouver les équations du mouvement. Montrer qu'on peut avoir* φ *et* ψ *en fonction de* t *par des quadratures;*

2° *Calculer la tension du fil* AB;

3° *On abandonne le système sans vitesse initiale à partir d'une position quelconque. Étudier le mouvement dans ce cas;*

4° *On suppose les conditions précédentes, mais* φ_0 *étant infiniment petit principal. Trouver les parties principales de* φ *et* ψ. *Calculer la valeur de la tension, au troisième ordre près.*

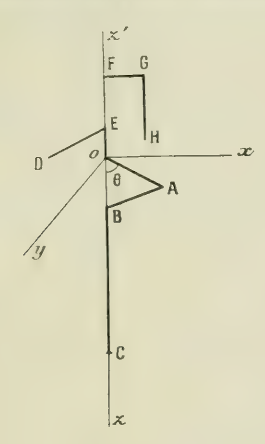
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une sphère homogène, creuse, d'épaisseur négligeable, de masse* 100g, *de rayon* 10cm, *est attachée à un fil de* 90cm *de long et de masse négligeable. Quand la sphère se déplace dans l'air, elle éprouve une résistance qu'on suppose réduite à une force unique appliquée en son centre, en sens inverse de la vitesse* v *de celui-ci, et égale, en unités C.G.S., à* $\frac{Sv^2}{10000}$, *en appelant* S *la surface totale de la sphère :*

1° *On écarte la sphère de sa position d'équilibre d'un angle* $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ *et on l'abandonne sans vitesse initiale. Former l'équation qui donne l'angle* θ_1 *dont remonte la sphère au bout de la première oscillation simple. Prouver que* $\theta_1 < \theta_0$;

2° *On suppose* θ_0 *infiniment petit principal. Calculer la partie principale de la différence* $\theta_0 - \theta_1$. *En supposant l'écart initial du point le plus bas de la sphère égal à* 10cm, *calculer approximativement l'écart suivant.*

(Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — *Dans le système indiqué par la figure*, DEOABC *est un ensemble de tiges rectilignes homogènes, d'épaisseur négligeable et de densité linéaire égale à* 1. *Leurs dimensions sont indiquées ci-contre. Les tiges* DE *et* EO *sont solidaires l'une de l'autre; elles peuvent tourner autour de l'axe vertical* $z'Oz$ (Oz *vers le*



bas), qui traverse la tige OE, *supposée creuse;* OA *est articulée en* O *avec* EO *suivant un axe horizontal invariablement lié à* DEO. *En* A *et* B, *on a des articulations parallèles à la précédente. Enfin,* BE *est assujettie à glisser le long de* Oz *et peut, en outre, pivoter sur elle-même :*

1° *On amène* B *en* O; *on imprime à* DE *une vitesse angulaire* ω *au moment précis où l'on abandonne* BC. *Trouver le mouvement du système. Valeurs de* ω *pour lesquelles* A *traverse* Oz;

2° *On lance encore* DE *avec une vitesse angulaire* ω *infiniment petite; mais la position initiale de* A *est infiniment voisine de* Oz. *Montrer que* A *reste voisin de* Oz. *Équations des petits mouvements;*

3° *On introduit maintenant la tige coudée* FGH, *qui peut tourner autour de* Oz, *indépendamment du système* (S) *précédent;* FG *est horizontale et* GH *verticale; en outre, elles ont encore une densité linéaire égale à* 1. *Ceci étant, on place* FGH *dans un azimut quelconque. Puis on*

lance (S) *comme dans* (1°). *Au bout d'un certain temps,* ED *rencontre* GH. *Il se produit une percussion, pendant laquelle on suppose que les deux tiges restent en contact. Calculer les vitesses après le choc;*

4° *Étudier brièvement le mouvement après le choc. Quand les deux tiges se séparent-elles? Montrer que la vitesse angulaire, pour une valeur donnée de* θ *et pour le mouvement actuel, est, avec la vitesse correspondante du mouvement de* (1°), *dans un rapport plus petit que* 1 *et qui ne dépend que de* θ. *Prouver que* B *ne revient jamais en* O.

N.-B. — *On fera abstraction des frottements.*

Épreuve pratique. — *Un fil élastique, dont la longueur naturelle est* $2l$, *est coupé en deux parties égales. On fixe chacune de celles-ci, par une extrémité, à une petite sphère* M, *pesant* 10g *et assimilable à un point matériel. Les deux autres bouts sont attachés à deux clous* A *et* B *fixés dans une planche mobile et distants de* 1m. *Enfin, la tension de chaque fil est* $k.\Delta r$, Δr *désignant l'allongement du fil à partir de* l :

1° *On place* AB *verticalement,* A *en haut;* M *prend une position d'équilibre située à* 60cm *au-dessous de* A. *En déduire le coefficient* k;

2° *On place* AB *horizontalement;* M *prend une position d'équilibre située à* 20cm *au-dessous de* AB. *En déduire* l;

3° *On place* AB *comme dans* (1°) *et l'on abandonne* M *sans vitesse initiale à partir d'une position* M_1 *située à* 40cm *au-dessous de* A. *La sphère tombe jusqu'en* M_2. *Calculer* AM_2 *et la durée de la chute;*

4° *On place* AB *horizontalement et l'on abandonne* M *sans vitesse initiale à partir du milieu de* AB. *Calculer la hauteur dont tombe la sphère.*

N.-B. — *Les distances seront calculées à* 1cm *près et les temps à* 1s *près.* (Novembre 1911.)

ERRATUM.

Page 332, dernière ligne, *au lieu de* Sondat, *lire* G. Fontené.

[C2]

EXPOSITION D'UN MÉMOIRE DE M. W. CROFTON (1);

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Je désire attirer l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* sur des énoncés élégants qui sont à peu près ignorés en France, bien qu'ils soient susceptibles de suggérer un grand nombre d'exercices intéressants.

1. Soit

$$(1) \qquad x \sin\theta - y \cos\theta - p = 0 \qquad (0 \leq \theta < \pi)$$

l'équation d'une droite D en coordonnées rectangulaires.

(1) *Philosophical Transactions*, 1868; *Comptes rendus*, t. LXV, et LXVIII.

J.-A. Serret a vérifié les deux principaux énoncés de Crofton (*Comptes rendus*, t. LXVIII; *Annales de l'École Normale supérieure*, 1869).

On trouvera un exposé des raisonnements de Crofton dans un Ouvrage de E. Czuber dont une traduction belge, intitulée : *Probabilités et moyennes géométriques*, a été publiée chez Hermann. Crofton obtient ses résultats en utilisant les théorèmes généraux sur les probabilités pour le calcul de certaines probabilités géométriques; cela le conduit en somme tout simplement à évaluer des intégrales multiples par des changements de variables. Ici, je suis exactement les raisonnements de Crofton, en supprimant seulement les allusions aux probabilités, ce qui ne diminue en rien leur caractère suggestif; on pourrait s'écarter moins encore des raisonnements de Crofton en remarquant que certaines de ses démonstrations sont en somme des considérations de géométrie infinitésimale susceptibles de remplacer les calculs de déterminants fonctionnels que j'effectue directement.

L'intégrale

$$I = \int\int dp\, d\theta, \tag{2}$$

étendue à toutes les droites D remplissant une certaine condition, par exemple coupant une courbe C donnée, a un sens très clair : si l'on considère p, θ comme deux coordonnées ordinaires d'un point d, c'est l'intégrale étendue au domaine Δ du plan (p, θ) dont tous les points d correspondent à des droites D coupant C.

Si l'on dit qu'on compte dans I chaque droite D autant de fois qu'elle a de points de rencontre avec C, cela veut dire qu'on décompose Δ en régions R_1, R_2, ..., les points d de R_k correspondant aux droites D coupant C en k points, et qu'on prend pour I la somme $\Sigma k I_k$, I_k étant l'intégrale étendue à R_k. Ceci étant, nous démontrerons, avec Cauchy [1], le théorème suivant :

La longueur L *d'une courbe* C *est la moitié de* $\int\int dp\, d\theta$ *dans laquelle on compte chaque droite* D *du plan autant de fois qu'elle a de points communs avec* C [2].

Soit M, de coordonnées x, y, l'un des points de rencontre de D et de C ; soit s l'abscisse curviligne de M sur C et soit α l'angle de Ox et de la tangente à C au

---

[1] *Comptes rendus*, t. XIII.

[2] Pour éviter des difficultés inutiles à considérer ici, j'introduis les restrictions suivantes : C a une longueur finie et est formée d'un nombre fini d'arcs le long de chacun desquels C a une tangente variant d'une façon continue ; le nombre maximum des points communs à C et à une droite D est fini.

L'intégration en dp étant effectuée, I s'écrit $\int_0^\pi P\, d\theta$, où P est la longueur totale de la projection orthogonale de C sur une droite de direction θ. C'est sous cette forme que Cauchy énonce son résultat. On pourra transformer de même les énoncés suivants.

point M. Les paramètres p, θ de la droite D vérifient l'équation (1) qui, différentiée, donne

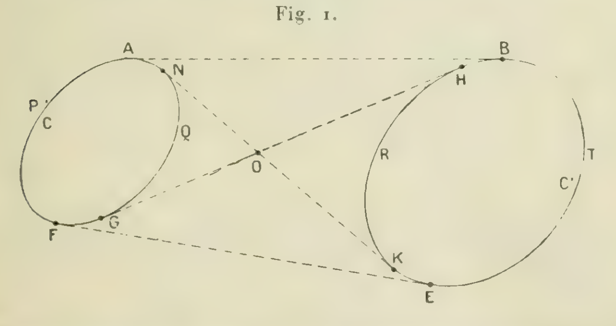
$$\sin(\theta - \alpha)\, ds = dp;$$

donc on a

$$\begin{aligned} I = \int\int dp\, d\theta &= \int\int |\sin(\theta - \alpha)|\, ds\, d\theta \\ &= \int_0^L \left[\int_\alpha^{\pi+\alpha} \sin(\theta - \alpha)\, d\theta\right] ds = 2L. \end{aligned}$$

Si l'on étendait l'intégrale I à toutes les droites coupant C, mais chaque droite n'intervenant qu'une fois dans I, la valeur de cette intégrale serait évidemment la longueur de la plus petite courbe convexe fermée Γ, telle que tout point de C soit point de Γ ou soit point intérieur à Γ. Après avoir donné cette forme d'énoncé, Crofton en déduit de jolies conséquences : Soient C et C', deux contours convexes fermés, extérieurs l'un à

Fig. 1.



l'autre; menons les quatre tangentes communes à C et C' et désignons par I, I', α, β, γ, J_1, J_2 les valeurs de l'intégrale $\int\int dp\, d\theta$ étendue successivement aux droites coupant respectivement les contours convexes C, C', ABTEFP, ANOGFP, BHOKET, aux droites coupant à la fois C et C', aux droites passant entre C et C'. Dans ces intégrales, ne faisons compter qu'une fois

chaque droite considérée ; alors on a évidemment

$$\alpha = I + I' - J_1 + J_2,$$
$$\beta + \gamma = I + I' + J_2.$$

Mais I et I' sont les longueurs L et L' de C et C', α est la longueur Y du contour ABTEFP, c'est-à-dire « la longueur d'un fil tendu entourant extérieurement C et C' », $\beta + \gamma$ est la longueur X du « fil tendu croisé entourant C et C' » et l'on a

$$(3) \qquad J_1 = X - Y \quad [1],$$
$$(4) \qquad J_2 = X - L - L'.$$

Pour définir les droites qui donnent J_2, il suffit de connaître les arcs NQG, HRK ; la valeur que nous trouvons pour J_2 ne dépend évidemment que de ces arcs. En faisant grandir ces arcs on pourra supposer, par exemple, qu'ils deviennent les deux branches d'une hyperbole et NOK, GOH deviendront les asymptotes de cette hyperbole. Alors l'intégrale J_2 nous fait connaître « la différence entre la longueur d'une hyperbole et la longueur de ses asymptotes ». Expression dont le lecteur précisera facilement le sens.

2. Nous allons évaluer maintenant des produits d'intégrale. Un tel produit sera une intégrale quadruple

$$J = \int\int\int\int dp\, dp'\, d\theta\, d\theta'.$$

Les deux droites D, D', qui déterminent les valeurs des variables dans cette intégrale, se coupent en un point M dont les coordonnées vérifient l'équation (1)

[1] On prouvera facilement que, si les deux contours C et C' se coupent, on a

$$J_1 = L + L' - Y.$$

et l'équation analogue relative à p' et θ'. En différentiant ces relations on a dp et dp', donc le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(p, p')}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{vmatrix} = \sin(\theta' - \theta),$$

et, par suite;

$$\begin{aligned} J &= \int\int\int\int dp\, dp'\, d\theta\, d\theta' \\ &= \int\int\int\int |\sin(\theta' - \theta)|\, d\theta\, d\theta'\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Supposons que D et D' soient assujetties comme précédemment à rencontrer des courbes C, C', composées chacune d'un nombre fini d'arcs convexes [1], ou à rencontrer à la fois deux telles courbes ou à passer entre elles ; alors on connaît la valeur de J. Or, dans ces cas, θ et θ' sont assujettis à varier entre des limites fonctions de x, y qui correspondent aux diverses tangentes issues du point xy aux courbes C et C'. Donc on peut effectuer les intégrations en θ et θ' et l'on exprime ainsi J sous forme d'une intégrale double en $dx\, dy$.

Considérons une courbe fermée convexe. Soient (C) l'ensemble des droites qui la rencontrent, (Γ) l'ensemble complémentaire. Nous allons considérer, avec Crofton, le cas où D et D' font partie de (C) et (Γ).

Supposons que le point M(x, y) soit extérieur à C et que de ce point on voit C sous un angle α : calculons le coefficient de $dx\, dy$ dans l'intégrale double.

---

[1] Lorsque cette condition n'est pas remplie, l'interprétation géométrique de $\int\int |\sin(\theta' - \theta)|\, d\theta\, d\theta'$ ne paraît guère possible si l'on ne veut utiliser que les éléments géométriques usuels.

Si D et D′ font partie de (C), on a

$$(5)\quad \int\int |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_0^\alpha d\theta\left[\int_0^\theta \sin(\theta-\theta')\,d\theta' + \int_\theta^\alpha \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2(\alpha-\sin\alpha);$$

pour D appartenant à (C) et D′ à (Γ), on a

$$(6)\quad \int\int |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_0^\alpha d\theta\left[\int_\alpha^\pi \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2\sin\alpha;$$

pour D et D′ faisant partie de (Γ), on a

$$(7)\quad \int\int |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta' = \int_\alpha^\pi d\theta\left[\int_\alpha^\theta \sin(\theta-\theta')\,d\theta' + \int_\theta^\pi \sin(\theta'-\theta)\,d\theta'\right] = 2(\pi-\alpha-\sin\alpha).$$

Comme vérification remarquons que, pour $\alpha = 0$, ce dernier résultat se réduit à 2π, ce qui est bien la somme, pour α quelconque, du premier, du troisième et du double du deuxième résultat, c'est-à-dire ce qu'on doit obtenir quand D et D′ sont absolument quelconques. De là résulte aussi que, pour M intérieur à C, le coefficient de $dx\,dy$ est 2π quand D et D′ font partie de (C) et est nul dans les deux autres cas considérés.

Pour ce premier cas où D et D′ font partie de (C), l'intégrale quadruple J est égale à L^2 et la contribution du domaine intérieur à C dans l'intégrale en $dx\,dy$ est, on vient de le voir, 2π fois l'aire de ce domaine. Concluons avec Crofton, que :

Si l'on désigne par x, y les coordonnées d'un point extérieur à un contour convexe fermé C *de lon-*

gueur L et limitant une aire S, et si α est l'angle sous lequel on voit le contour C du point x, y, on a

$$\int\int(\alpha - \sin\alpha)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi S,$$

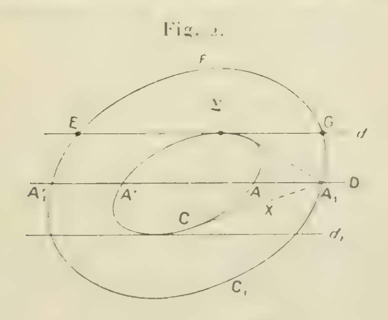
l'intégrale étant étendue à toute la partie du plan extérieure à C.

Pour le cas où D faisant partie de (C) et D′ de (Γ), on a

$$J = 2\int\int \sin\alpha\,dx\,dy\,;$$

mais, comme cette intégrale étendue à tout le plan est infinie, Crofton ne l'étend qu'à un anneau limité par C et par une courbe convexe enveloppante C_1, ce qui revient à calculer $\int\int dp\,d\theta\left[\int\int dp'\,d\theta'\right]$ pour toute droite de (C) associée à toute droite de (Γ) qui la coupe dans l'anneau. Pour des valeurs données de p et θ, l'intégrale $\int\int dp'\,d\theta'$ est étendue aux droites ne rencontrant pas C et rencontrant la droite D (p, θ) dans l'anneau limité par C et C_1. Soient A, A′ ; A_1, A'_1 les points de rencontre de D avec C et avec C_1 : l'intégrale

Fig. 2.



en $dp'\,d\theta'$ est étendue aux droites passant entre C et la courbe infiniment petite réduite à A_1 et aux droites

analogues passant entre C et A'_1. Donc, formule (4), cette intégrale est égale à

$$X + X' - 2L,$$

en désignant par X la longueur du contour convexe formé par un arc de C et les deux tangentes à C issues de A_1 ; X′ est la quantité analogue relative à A'_1. Donc on a

$$J = \int\int (X + X')\, dp\, d\theta - 2L^2 = 2\int\int \sin\alpha\, dx\, dy.$$

Le cas intéressant est celui où X est constant, alors on a

$$\int\int \sin\alpha\, dx\, dy = L(X - L).$$

Dans tous les cas, comme X est fonction de l'abscisse curviligne s_1 de A_1 sur C_1, par un changement de variable analogue à celui du début du n° 1, on a

$$J = 2\int\int \sin\alpha\, dx\, dy = \int (\cos\lambda - \cos\mu) X\, ds_1 - 2L^2,$$

λ et μ étant les angles des tangentes à C issues de A_1 avec la tangente à C_1 en ce point ; on suppose $0 < \lambda < \mu < \pi$, $\mu - \lambda = \alpha$. Au changement de variables ici employé est lié la formule

$$2L = \int (\cos\lambda - \cos\mu)\, ds,$$

qui devient

$$L = \sin\frac{\alpha}{2}\int \sin\frac{\lambda + \mu}{2}\, ds_1, \qquad L = \int \sin\frac{\alpha}{2}\, ds_1,$$

respectivement si, le long de C_1, α est constant ou si X est constant, auquel cas, d'après le raisonnement bien connu qui conduit aux théorèmes de Grave et de Chasles sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole, on a $\lambda + \mu = \pi$. On pourra appliquer ces formules au cas

où, C étant une ellipse, C_1 est le cercle orthoptique de C ou est une ellipse homofocale à C.

Crofton considère aussi le cas où D faisant partie de (C), D′ n'est assujettie qu'à rencontrer C_1 ; alors $J = 2\int\int \alpha\, dx\, dy$, l'intégrale étant étendue à l'anneau [formules (5) et (6)].

Conservant les mêmes notations que ci-dessus, raisonnons d'une façon analogue. $\int\int dp'\, d\theta'$ sera maintenant étendue à toutes les droites rencontrant AA_1 ou $A'A'_1$; donc ce sera $2(AA_1 + A'A'_1)$, par suite

$$\frac{J}{2} = \int\int \alpha\, dx\, dy = \int_0^{\pi} d\theta \left[\int (AA_1 + A'A'_1)\, dp \right].$$

L'intégration en dp donne comme résultat l'aire de la partie de l'anneau limité par C et C_1 qui se trouve entre les tangentes d et d_1 qui sont parallèles à D. Appelons Θ l'aire de l'anneau, Σ l'aire du segment EFG extérieur à C et limité par d à l'intérieur de C_1 : marquons un sens de parcours sur C et soit φ l'inclinaison de d; φ sera égal à θ ou à $\theta + \pi$; Σ est une fonction de φ et l'on a

$$\int\int_{\text{anneau}} \alpha\, dx\, dy = \pi\Theta - \int_0^{2\pi} \Sigma\, d\varphi,$$

formule particulièrement intéressante quand Σ est constant. On pourra en particulier l'appliquer à deux ellipses homothétiques et concentriques [1].

J'ai déjà dit qu'il n'y aurait aucune difficulté théorique nouvelle si l'on étendait l'intégrale J à des droites D, D′ assujetties à occuper certaines situations vis-à-vis

---

[1] Une formule analogue peut être établie pour deux hyperboles homothétiques, concentriques et situées dans le même angle des asymptotes.

de courbes C, C' convexes ou non. Seulement il faudra se rappeler que l'intégrale $\int\int |\sin(\theta-\theta')|\,d\theta\,d\theta'$, qu'il faut calculer, pourra changer d'expression chaque fois que le point x, y traversera C, C', une tangente singulière de C ou C' ou une tangente commune à ces courbes. Ces courbes et droites partagent le plan en régions et les énoncés ne peuvent être simples que si le nombre de ces régions est petit. Crofton examine entièrement le cas où D et D' rencontrent deux courbes convexes C et C', C' entourant C, auquel cas il n'y a que trois régions. Il obtient aussi le résultat suivant pour le cas où D et D' sont assujettis à passer entre les branches d'une hyperbole ou d'une courbe analogue.

Soit α celui des angles des tangentes à une hyperbole, issues du point extérieur x, y, dans lequel ne se trouve aucun point de la courbe ; on a

$$\int\int(\alpha-\sin\alpha)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\Delta^2,$$

l'intégration étant étendue à toute la partie du plan extérieure à l'hyperbole et Δ étant la différence entre la longueur de l'hyperbole et la longueur de ses asymptotes.

Comme autre cas où il n'y a que deux régions, on peut encore signaler celui où D et D' devraient rencontrer une même épi ou hypocycloïde fermée n'ayant pas d'autres points singuliers que ses points de rebroussements. Le lecteur pourra faire le calcul pour une courbe ayant la forme d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

3. Considérons maintenant le produit K de k intégrales I, relatives à des droites D_1 (p_1, θ_1) ; ... ; $D_k(p_k, \theta_k)$. Désignons par x_α, y_α les coordonnées du

point A_α de rencontre de D_α et de $D_{\alpha+1}$. A_α désignera aussi l'angle compris entre 0 et π de ces deux droites. a_α sera la distance de $A_{\alpha-1}$ et A_α. Les indices 1 et $k+1$ seront considérés comme identiques. On a

$$\begin{aligned} K &= \int_{\ldots 2k \ldots} \cdots \int dp_1 \ldots dp_k \, d\theta_1 \ldots d\theta_k \\ &= \int_{\ldots 2k \ldots} \cdots \int dx_1\, dy_1\, dp_3 \ldots dp_k\, d\theta_1 \ldots d\theta_k \sin A_1. \end{aligned}$$

De la dérivation des égalités

$$\begin{aligned} x_2 \sin\theta_2 - y_2 \cos\theta_2 &= x_1 \sin\theta_2 - y_1 \cos\theta_2, \\ x_2 \sin\theta_3 - y_2 \cos\theta_3 &= p_3, \end{aligned}$$

faite en supposant x_2, y_2, θ_2, p_3, seuls variables, on tire

$$\left| \frac{D(\theta_2, p_3)}{D(x_2, y_2)} \right| = \left| \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{(x_1 - x_2)\cos\theta_2 + (y_1 - y_2)\sin\theta_2} \right| = \frac{\sin A_2}{a_2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (8) \qquad K &= \int_{\ldots 2k \ldots} \cdots \int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, dp_4 \ldots dp_k \\ &\quad \times d\theta_1\, d\theta_3 \ldots d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2} \\ &= \int_{\ldots 2k \ldots} \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_{k-1}\, dy_{k-1} \\ &\quad \times d\theta_1\, d\theta_k \sin A_1 \frac{\sin A_2}{a_2} \cdots \frac{\sin A_{k-1}}{a_{k-1}}. \end{aligned}$$

En supposant x_k, y_k, θ_1, θ_k seuls variables, dérivons les égalités

$$\begin{aligned} x_k \sin\theta_1 - y_k \cos\theta_1 &= x_1 \sin\theta_1 - y_1 \cos\theta_1, \\ x_k \sin\theta_k - y_k \cos\theta_k &= x_{k-1} \sin\theta_k - y_k \cos\theta_k; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} &\left| \frac{D(\theta_1, \theta_k)}{D(x_k, y_k)} \right| \\ &= \left| \frac{\sin(\theta_k - \theta_1)}{[(x_1 - x_k)\cos\theta_1 + (y_1 - y_k)\sin\theta_1] \times [(x_{k-1} - x_k)\cos\theta_k + (y_{k-1} - y_k)\sin\theta_k]} \right| = \frac{\sin A_k}{a_1 a_k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$(9)\qquad K = \int_{\dots 2k \dots} \int \frac{\sin A_1 \dots \sin A_k}{a_1 \dots a_k}\, dx_1\, dy_1 \dots dx_k\, dy_k.$$

D'où des énoncés tels que celui-ci : L'intégrale précédente, étendue à tous les groupes de k points $A_1, \dots, A_k$ tels que chaque droite D_α coupe un contour convexe fermé C_α de longueur L_α, est égale au produit $L_1 L_2 \dots L_\alpha$ des longueurs de ces contours.

Un tel énoncé fait intervenir un domaine d'intégration fort compliqué et ne permet pas d'abaisser l'ordre de l'intégrale K dont on est parti. Ceci peut cependant se faire dans une certaine mesure ; pour le cas de trois droites, par exemple, on a vu, formule (8), que

$$K = \int\int\int\int\int\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, d\theta_1\, d\theta_3\, \frac{\sin A_1 \sin A_2}{a_2};$$

or les intégrations en $d\theta_1$ et $d\theta_3$ peuvent être effectuées de suite. Mais après le domaine d'intégration est encore formé de tous les couples de points tels que la droite qui les porte rencontre une courbe donnée.

Laissons donc de côté ce mode de généralisation, qui fournit cependant des exercices précieux pour les professeurs, et essayons maintenant de généraliser en remplaçant l'intégrale I primitive par une autre intégrale. Cela est possible d'une infinité de manières ; choisissons les intégrales qu'étudie Crofton.

4. Prenons pour I l'intégrale double $\int\int dx\, dy$, d'où $J = \int\int\int\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$ et introduisons les coordonnées p, θ de la droite joignant les deux points $x_1\, y_1$; $x_2\, y_2$, ainsi que les distances ρ_1, ρ_2 de ces points au pied de la perpendiculaire abaissée de l'ori-

gine sur la droite. On a

$$x_1 = -p\sin\theta + \rho_1\cos\theta, \qquad x_2 = -p\sin\theta + \rho_2\cos\theta,$$
$$y_1 = p\cos\theta + \rho_1\sin\theta, \qquad y_2 = p\cos\theta + \rho_2\sin\theta,$$

d'où, par un calcul facile et qu'on pourrait d'ailleurs supprimer en partie à l'aide de ce qui précède,

$$J = \int\int\int\int |\rho_2 - \rho_1|\, dp\, d\theta\, d\rho_1\, d\rho_2.$$

Or les intégrations en $d\rho_1\, d\rho_2$ peuvent être effectuées; supposons que l'intégrale I soit étendue à l'intérieur d'un contour convexe C, alors ρ_1 et ρ_2 peuvent varier entre deux limites a, b ($a > b$), fonctions de p, θ et telles que $c = b - a$ soit la longueur de la corde découpée dans C par la droite p, θ. Et l'on a

$$\int\int |\rho_2 - \rho_1|\, d\rho_1\, d\rho_2$$
$$= \int_a^b d\rho_1 \left[\int_a^{\rho_1} (\rho_1 - \rho_2)\, d\rho_2 + \int_{\rho_1}^b (\rho_2 - \rho_1)\, d\rho_2 \right] = \frac{1}{3} c^3,$$

d'où le résultat de Crofton :

C *étant un contour convexe limitant une aire* S, *et* c *étant la longueur de la corde de* C *qui est portée par la droite*

$$x\sin\theta - y\cos\theta - p = 0,$$

on a l'égalité

$$\int\int c^3\, dp\, d\theta = 3\,S^2;$$

l'intégrale étant étendue à toutes les sécantes de C.

Ce théorème est susceptible des mêmes modes de généralisation que celui précédemment étudié. On pourra supposer que les deux intégrales I, dont J est le produit, ne sont pas relatives au même domaine. Si, par exemple, la droite (p, θ) considérée a dans un domaine convexe C_1 d'aire S_1 un segment c_1 et si l est

la distance des milieux de c et c_1, on a

$$\int\int cc_1\, l\, dp\, d\theta = \mathrm{SS}_1,$$

quand les courbes C et C_1 sont entièrement extérieures l'une à l'autre.

On pourra aussi multiplier plus de deux intégrales I; pour trois intégrales nous aurons trois points x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 dont il sera naturel d'exprimer les coordonnées à l'aide du rayon R de la circonférence passant par ces trois points, des coordonnées ξ, η de son centre et des inclinaisons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des rayons des trois points. On verra que les intégrations en $d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\varphi_3$ peuvent être effectuées et l'on exprimera ainsi le produit de trois aires par une intégrale triple étendue à une famille de cercles. Pour obtenir un énoncé simple, il faut, comme précédemment, que le nombre des régions soit petit. Un cas où l'on n'aurait qu'une région serait celui où les courbes limitant les domaines seraient extérieures les unes aux autres et telles que toute circonférence qui les coupe toutes trois ne coupent chacune d'elles qu'en deux points. Je laisse au lecteur le soin de formuler le résultat qui est relativement simple.

Crofton considère encore l'intégrale $I = \int d\varphi$, où φ représente l'inclinaison de la tangente dirigée à une courbe convexe C. Pour avoir toutes les tangentes on prendra φ de o à 2π et $I = 2\pi$. Pour calculer $J = I^2 = 4\pi^2$, introduisons les coordonnées x, y du point de rencontre des deux tangentes d'inclinaison φ et φ'. Si ξ et η sont les coordonnées du point de contact de la première on a :

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = \xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi. \tag{10}$$

En dérivant et en se rappelant que $d\xi$ et $d\eta$ sont

proportionnels à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, on a

$$(11)\qquad dx\sin\varphi - dy\cos\varphi = [(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\sin\varphi]\,d\varphi$$

et une égalité analogue en φ'. Or la quantité entre crochets est la distance des points ξ, η; x, y, c'est-à-dire la longueur T de l'une des tangentes issues de x, y à C. T' étant l'autre tangente et α l'angle de ces deux tangentes, en remarquant que les deux combinaisons φ, φ' et φ', φ donnent le même point x, y, on a

$$J = 2\int\int \frac{\sin\alpha}{TT'}\,dx\,dy.$$

Crofton considère aussi l'intégrale $\int ds$ étendue à la même courbe. Puisque l'on a

$$ds = R\,d\varphi,$$

R étant le rayon de courbure en ξ, η; on aura aussi

$$\int\int ds\,ds' = 2\int\int \sin\alpha\,\frac{RR'}{TT'}\,dx\,dy.$$

D'où ces deux résultats de Crofton :

x, y étant les coordonnées rectangulaires d'un point extérieur à une courbe convexe C *de longueur* L; T, T' *les longueurs des tangentes à* C *issues de x, y; α leur angle;* R *et* R' *les rayons de courbure de* C' *aux points de contact des tangentes considérées, on a*

$$2\pi^2 = \int\int \sin\alpha\,\frac{dx\,dy}{TT'}, \qquad L^2 = 2\int\int \sin\alpha\,\frac{RR'}{TT'}\,dx\,dy;$$

les intégrales étant étendues à la partie du plan extérieure à C.

Au lieu de faire le produit de plusieurs intégrales I de même expression, on peut aussi multiplier des intégrales de formes différentes. La considération du produit

des deux précédentes intégrales I conduit à un résultat qui, avec les notations précédentes, est exprimé par l'égalité

$$2\pi L = \int\int \sin\alpha \frac{R + R'}{TT'}\, dx\, dy.$$

Combinons aussi la première intégrale I avec les deux dernières et calculons par exemple $\int\int\int dp\, d\theta\, d\varphi$. x, y étant les coordonnées du point commun à la droite (p, θ) et à la tangente d'inclinaison φ, passons des variables p, θ, φ aux variables x, y, θ. La différentielle totale $d\varphi$ vient d'être calculée (11) et la différentiation de l'équation (1) donne dp, d'où

$$\left|\frac{D(p, \theta, \varphi)}{D(x, y, \theta)}\right| = \frac{|\sin(\theta - \varphi)|}{T}.$$

L'intégration en $d\theta$ peut être effectuée; elle donne $1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; donc, en étendant toujours les intégrales à la partie du plan extérieure à C, on a

$$\pi L = \int\int \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) dx\, dy;$$

$$L^2 = 2 \int\int \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{R}{T} + \frac{R'}{T'}\right) dx\, dy.$$

5. L'intégrale $\int\int dp\, d\theta$ présente un intérêt qu'il faut signaler. On peut définir la mesure d'un ensemble quelconque de points en disant que c'est un nombre positif ou nul attaché à l'ensemble et tels que deux ensembles égaux, c'est-à-dire superposables, aient même mesure, et que l'ensemble formé par la réunion de plusieurs [1] autres, sans éléments communs deux à

---

[1] Si par « plusieurs » on entend un nombre fini, la définition s'applique aux ensembles mesurables au sens de M. Jordan; si « plusieurs » peut signifier une infinité dénombrable, la définition s'applique à tous les ensembles dits *mesurables*.

deux, ait pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

Cette définition suffit pour définir la mesure à un facteur près, dont l'existence correspond à la possibilité de choisir à volonté l'unité de mesure. On peut prendre la même définition pour la mesure d'un ensemble quelconque dont les éléments sont, non plus des points, mais d'autres êtres géométriques. Pour étudier le cas des ensembles de droite, faisons correspondre comme au début à chaque droite $D(p, \theta)$ de l'ensemble un point d de coordonnées ordinaires rectangulaires p, θ. Un déplacement dans le plan des D revient au changement de variables

$$(12) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \theta - a, \\ p_1 = p - b\cos\theta + c\sin\theta, \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes. Nous avons donc à déterminer la mesure des ensembles de points d en considérant comme superposables deux ensembles transformables l'un dans l'autre par une des transformations (12). Or ceci est très simple. Divisons le plan en quadrilatères curvilignes par les droites $x = nh$ et les courbes $y = nh + \cos x$, h étant un nombre positif fixes et n prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. Ces quadrilatères sont superposables au sens indiqué, ils ont donc même mesure. Ils ont, d'autre part, évidemment même aire.

Soient alors π et π_1 deux domaines simples, deux domaines polygonaux par exemple, du plan des d. Soit m (ou m_1) le nombre des quadrilatères qui sont contenus dans π (ou π_1) et soit M (ou M_1) le nombre des quadrilatères qui contiennent des points de π (ou π_1). On a

$$\frac{m}{M_1} < \frac{\text{aire } \pi}{\text{aire } \pi_1} < \frac{M}{m_1},$$

et l'on sait que, quand h tend vers zéro, les deux membres extrêmes ont la même limite. Mais on a aussi

$$\frac{m}{M_1} \leqq \frac{\text{mesure}\,\pi}{\text{mesure}\,\pi_1} \leqq \frac{M}{m_1},$$

donc

$$\frac{\text{mesure}\,\pi}{\text{aire}\,\pi} = \frac{\text{mesure}\,\pi_1}{\text{aire}\,\pi_1} = \lambda; \tag{13}$$

λ est arbitraire. On peut prend $\lambda = 1$. Partant de là on peut construire une théorie de la mesure des ensembles de droites qu'on peut résumer en disant qu'un ensemble E de droite D est dit *mesurable* lorsque l'ensemble e des points d correspondants est mesurable [1] et qu'ils ont même mesure $\int\int dp\,d\theta$ [2].

Ces conclusions supposent toutefois qu'on ait donné une valeur finie à la constante λ de l'équation (13) et il est obligé qu'il en soit ainsi si l'on désire qu'un ensemble E de droites, auquel correspond un ensemble e de points d couvrant une partie du plan, ait une mesure finie. Mais si e est une courbe ordinaire, un arc analytique par exemple, et si l'on ne s'occupe du problème de la mesure que pour les ensembles $\mathcal{E}$ formés de droites appartenant à E, on pourra donner à λ une valeur infinie. Il est facile de voir que le problème de la mesure est alors indéterminé; soit, en effet, R le rayon de courbure de la courbe Λ enveloppe des droites D, formant E, au point d'abscisse curviligne s de cette courbe; quelle que soit la fonction positive f, l'inté-

---

[1] Au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire la superposition étant définie par la considération des déplacements ordinaires dans le plan des d.

[2] Le raisonnement précédent s'appuie uniquement sur le fait qu'une transformation quelconque du groupe (12) est biunivoque, continue, qu'elle conserve les aires et qu'elle dépend de trois paramètres.

grale

$$\int f\left(R, \frac{dR}{ds}, \frac{d^2R}{ds^2}, \dots\right) ds,$$

étendue à l'ensemble des points de contact des droites de $\mathcal{C}$, donne une solution du problème. Les deux intégrales $\int d\varphi$, $\int ds$, considérées par Crofton, sont des cas particuliers de celle-ci qui ne fournit cependant pas la solution la plus générale du problème ([1]).

L'insuffisance des conditions du problème de la mesure que nous rencontrons ici est analogue à l'insuffisance connue de ces mêmes conditions pour caractériser la longueur d'une courbe plane ou gauche ou l'aire d'une surface.

([1]) Le problème est d'ailleurs fort imprécis. Si A est donnée et si l'on ne s'occupe de satisfaire aux conditions du problème de la mesure que pour des ensembles de tangentes à A, il se peut même que la seconde condition de ce problème perde tout sens; cela arrivera notamment si R ne reprend jamais deux fois la même valeur, auquel cas $\int \varphi(s)\, ds$ donnera une solution du problème, quelle que soit $\varphi(s)$ positive.

Si l'on veut résoudre le problème pour tous les ensembles de droites qui enveloppent des courbes formées d'un nombre fini d'arcs analytiques, le problème se précise beaucoup plus et il se pourrait que l'intégrale du texte en fournisse la solution la plus générale.

Quand on ne s'occupe que d'ensembles dont les éléments, dépendant des coordonnées p_1, p_2, sont définis par des égalités analytiques de la forme $p_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_\alpha)$, il est naturel d'attacher une importance particulière aux solutions du problème de la mesure de la forme

$$\int\int\cdots\int F\left(p_1, \dots, \frac{dp_1}{dt_1}, \dots, \frac{d^2 p_\nu}{dt_\gamma^2}, \dots\right) dt_1 \dots dt_\alpha.$$

La théorie des groupes donne des procédés permettant la recherche de ces intégrales. Dans un article du *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, M. E. Cartan a étudié toutes celles de ces intégrales qui ne portent que sur des fonctions des paramètres, pour le cas des droites dans le plan et pour les cas des plans et des droites dans l'espace, en signalant leur importance au point de vue de la mesure.

6. Il est facile maintenant de faire comprendre comment des questions de probabilités ont pu conduire Crofton à l'étude des intégrales indiquées. Supposons qu'on jette au hasard une aiguille sur le sol et que la position de cette aiguille détermine la droite prise au hasard dans le plan. On pourra se demander quelle est la probabilité pour que cette droite satisfasse à certaines conditions. Cette probabilité a un sens statistique assez net; il s'agit de la définir et de la calculer mathématiquement. Comme dans tout autre essai de traduction mathématique d'un problème physique, il nous faut ici introduire des hypothèses. Celles que l'on adopte sont relatives à ce que l'on doit appeler des circonstances également probables, comme dans le cas des probabilités ordinaires. Nous supposerons que la façon de jeter l'aiguille au hasard est telle qu'il y a probabilité égale pour que la droite appartienne à un ensemble E ou à un ensemble E_1, pourvu que E et E_1 se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du plan [1].

On est alors conduit à admettre que le rapport des probabilités pour que la droite fasse partie d'un ensemble e ou d'un ensemble e_1 est le rapport des mesures de e et de e_1. D'où la définition et la détermination mathématique des probabilités.

Les considérations du paragraphe 1 sont utilisées par Crofton pour des problèmes de probabilités relatives à la droite. Les considérations du paragraphe 2

---

[1] Il n'est raisonnable de supposer cette condition à peu près réalisée physiquement que si l'on ajoute que les droites composant E et E_1 doivent être à une distance inférieure à une longueur donnée d'un point donné. Toutes les positions que l'aiguille peut effectivement prendre forment un ensemble dont la probabilité doit être prise égale à un.

sont relatives à des problèmes où l'on étudie les angles dont, par exemple, les deux côtés rencontrent une même courbe convexe. La mesure des ensembles d'angles présente cette particularité nouvelle que, tous les éléments des ensembles n'étant plus nécessairement superposables, il est bien certain *a priori* que les conditions du problème de la mesure seront insuffisantes pour la définition d'une mesure unique [1].

Par exemple, $f(\theta-\theta')$ étant une fonction positive $\int\int\int\int f(\theta-\theta')\,dp\,dp'\,d\theta\,d\theta'$, étendue aux paramètres p, p', θ, θ' fixant la position des deux côtés de l'angle, sera une solution du problème de la mesure.

Crofton suppose qu'on choisisse au hasard, indépendamment l'un de l'autre, les deux côtés de l'angle et il applique le théorème des probabilités composées, ce qui est très légitime si l'on a égard à la définition statistique de la probabilité. Il est donc conduit à prendre $f=1$ [2].

---

[1] Cette insuffisance n'est pas de nature différente de celle déjà rencontrée. Dans les deux cas il y a insuffisance, parce que le groupe de transformations, qui nous est donné comme conservant la mesure, ne contient pas assez de paramètres pour qu'il nous soit possible de décomposer tous les ensembles à mesurer en ensembles infiniment petits de mesures égales.

[2] On peut noter qu'il se présente ici une circonstance, qu'on rencontre fréquemment : il suffit d'admettre la partie qualitative du théorème pour que la partie quantitative en soit une conséquence nécessaire. Admettons, en effet, que la probabilité relative à une position d'un angle ne dépende que des probabilités relatives aux positions de ses côtés. Il faudra évaluer cette probabilité avec une mesure des angles qui soit seulement fonction des mesures m et n des ensembles formés par les côtés de l'angle. Or cette fonction, $f(m,n)$ doit être croissante et par rapport à m et par rapport à n et l'on doit avoir

$$f(m+m', n+n') = f(m,n) + f(m,n') + f(m',n) + f(m',n'),$$

d'où l'on déduit de suite $f = Cmn$. D'où le théorème des probabilités composées.

Les intégrales du paragraphe 4 sont considérées par Crofton à l'occasion de questions relatives à des couples de points dans un domaine convexe et à des couples de tangentes d'une courbe donnée.

Le lecteur, qui s'intéresserait à ces questions de mesure et qui désirerait connaître ce qui a été fait relativement aux mesures d'ensembles de plans ou de droites de l'espace, devrait se reporter aux travaux déjà cités de Cauchy, de Crofton, de M. Czuber et de M. Cartan, ainsi qu'aux travaux de géométrie de Minkowski (¹).

[C2e]

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{d\theta}{1 + e\cos\theta}$;

PAR M. RENÉ GARNIER.

Je me propose d'indiquer dans cette Note comment on peut obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{d\theta}{1 + e\cos\theta} \quad (|e| < 1),$$

à l'aide de considérations géométriques.

1. Supposons, comme il est permis, $e > 0$, et considérons l'ellipse (E) définie en coordonnées polaires par l'équation

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

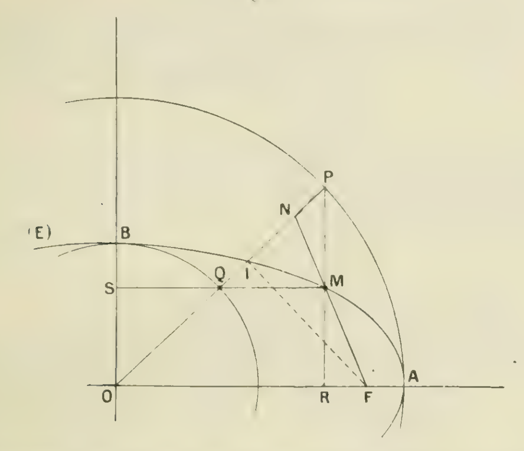
il s'agit d'effectuer la quadrature $\frac{1}{p}\int r\,d\theta$. Or, soient

---

(¹) *Gesammelte Abhandlungen* von H. MINKOWSKI, t. II. *Voir*, par exemple, les pages 215, 257, 278.

F le foyer de (E) situé au pôle des coordonnées, O le centre de (E), M un point de (E), P le point du cercle principal correspondant à M dans la transformation

Fig. 1.



homographique classique, N l'intersection de OP et FM, R et S les projections de M sur le grand axe OA et le petit axe OB, Q l'intersection de OP avec MS et I la projection de F sur OP. J'établirai d'abord la relation

$$\mathrm{ON} + \mathrm{FN} = \mathrm{OA} + \mathrm{OB}.$$

On a évidemment

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{FR} + \mathrm{QS}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{FN} = \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FR} + \mathrm{QS}};$$

or

$$\mathrm{FR} + \mathrm{QS} = \mathrm{OF} - \mathrm{OR} + \mathrm{OR}\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{OF} - \mathrm{OR}\,\frac{\mathrm{OA} - \mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$$

$$= \mathrm{OF} - \mathrm{OR}\,\frac{\overline{\mathrm{OF}}^2}{(\mathrm{OA} + \mathrm{OB})\,\mathrm{OA}} = \mathrm{OF} - \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA} + \mathrm{OB}}.$$

Mais, d'après la démonstration classique de Courcelles, on a

$$\mathrm{FM} = \mathrm{PI},$$

d'où

$$OQ + FM = OA + OB - OI.$$

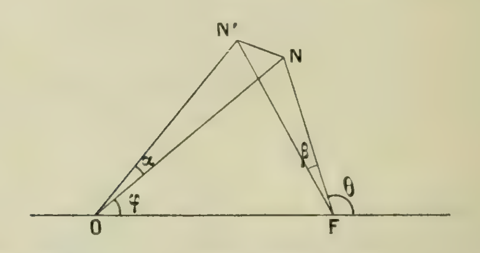
Il en résulte immédiatement

$$ON + FN = OF \frac{OA + OB - OI}{OF - \frac{OF.OI}{OA + OB}} = OA + OB.$$

C. Q. F. D.

2. Quand M décrit (E), le lieu du point N est donc une ellipse (e) de foyers O et F [1]. Soit alors N′ un

Fig. 2.



point infiniment voisin de N sur (e) ; on a, à des infiniment petits d'ordre supérieur près :

$$\frac{\alpha.ON}{\sin \widehat{ON'N}} = NN' = \frac{\beta.FN}{\sin \widehat{FN'N}},$$

mais les angles $\widehat{ON'N}$ et $\widehat{FN'N}$ sont supplémentaires (à un infiniment petit près) en vertu de la propriété classique de la tangente à l'ellipse ; il vient donc :

$$\alpha.ON = \beta.FN,$$

(1) On démontrerait de même que le lieu de l'intersection de FM avec la symétrique de OP par rapport à OA est une hyperbole homofocale à (e).

multipliant par $\frac{OQ}{ON}$ et employant les notations habituelles, on obtient la relation

$$b\,d\varphi = r\,d\theta. \tag{1}$$

La valeur de l'intégrale indéfinie cherchée est donc $\frac{b\varphi}{p}$ et la formule classique

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

l'exprime immédiatement en fonction de θ, si l'on préfère ([1]).

3. La Géométrie permet encore d'établir autrement la relation (1). Soient M′ un point de (E) infiniment voisin de M et P′ le point correspondant du cercle principal. On a :

$$r\,d\theta = 2\,\text{aire}\,\frac{FMM'}{FM} = 2\,\frac{OB}{OA}\,\frac{\text{aire}\,FPP'}{FM} = \frac{OB}{OA}\,\frac{PP' \times PI}{FM}.$$

Mais on a

$$PI = FM,$$

d'où

$$r\,d\theta = \frac{OB}{OA}\,PP' = b\,d\varphi.$$

La première méthode, quoique plus longue, a sur la seconde l'avantage d'être indépendante de l'expression de l'aire d'un secteur infiniment petit et de sa projection sur un plan ; elle fait connaître, en outre, une propriété remarquable du point N.

([1]) Rappelons qu'analytiquement la relation (1) résulte du rapprochement des équations $b\sin\varphi = r\sin\theta$ et $\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\theta}{\sin\theta}$, dont la seconde provient de (2) par différentiation logarithmique.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1912).

Mathématiques élémentaires (1).

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I.

1. Les relations

$$\alpha.\overline{AM} = \overline{AQ}, \quad \beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \quad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \quad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP},$$
$$\alpha = \mp 1, \quad \beta = \mp 1, \quad \ldots$$

donnent lieu aux remarques suivantes, qui nous seront utiles par la suite. Si (a), (b), (c), (d) sont les plans perpendiculaires aux plans des angles A, B, C, D, menés par les bissectrices de ces angles, et (a'), (b'), (c'), (d') les plans analogues menés par les bissectrices des angles extérieurs, le centre S de la sphère est

dans le plan (a) pour $\alpha = -1$,
dans le plan (a') pour $\alpha = +1$;

on doit remarquer que la bissectrice de l'angle A est la pseudo-bissectrice de l'angle des axes m, n, p, q définis dans l'énoncé.

On a

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{DP}} = \alpha\beta\gamma\delta = \pm 1,$$

et le produit $\alpha\beta\gamma\delta$ ne change pas de signe quand on change l'orientation de la droite m, par exemple : α et

(1) *Voir* l'énoncé p. 469 des *Nouvelles Annales* de 1912

β changent de signe. *On peut écrire*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \alpha\beta\gamma\delta = \pm 1,$$

et deux cas se présentent [1].

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = +1$, les quatre points M, N, P, Q *sont dans un même plan;* ils sont par suite sur un cercle. Si l'on écrit

$$\begin{aligned} a &= \overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} - \beta.\overline{BN}, \\ b &= \overline{BC} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{BN} - \gamma.\overline{CP}, \\ c &= \overline{CD} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{CP} - \delta.\overline{DQ}, \\ d &= \overline{DA} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{DQ} - \alpha.\overline{AM}, \end{aligned}$$

en combinant ces relations de manière à faire disparaître $\overline{BN}$, $\overline{CP}$, $\overline{DQ}$, on obtient

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = \overline{AM}(1 - \alpha\beta\gamma\delta) = 0;$$

le contour ABCDA *n'est pas quelconque.*

Deux des termes devant être négatifs, on doit avoir

$$\beta \times \beta\gamma \times \beta\gamma\delta = +1,$$

donc

$$\beta\delta = +1, \qquad \alpha\gamma = +1,$$

les sommets A et C (auxquels se rapportent α et γ) étant toujours associés, ainsi que les sommets B et D, on peut avoir

$$\begin{matrix} \alpha = \gamma = -1, \\ \beta = \delta = -1, \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha = \gamma = -1, \\ \beta = \delta = +1, \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha = \gamma = -1, \\ \beta = \delta = -1, \end{matrix}$$

[1] Le nombre des rapports $\frac{MA}{MB}, \frac{NB}{NC}, \ldots$ qui sont négatifs est de même gravité que le nombre des rapports $\frac{AM}{AQ}, \frac{BN}{BM}, \ldots$ qui sont négatifs; mais on ne doit pas perdre de vue que α, β, γ, δ sont les signes de ces derniers rapports et non les signes des rapports $\frac{MA}{MB}, \ldots$

ce qui donne les trois cas résumés par l'écriture

$$(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)=0;$$

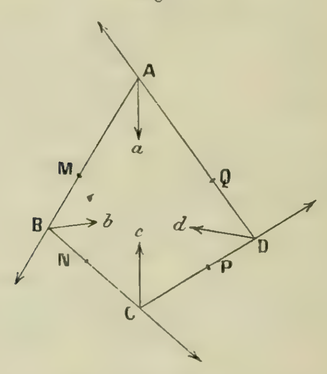
on peut écrire

$$a+c=b+d \quad \text{ou} \quad |a-c|=|d-b|;$$

cela forme seulement deux cas distincts.

Avec $a-b+c-d=0$, on a la figure 1 et des

Fig. 1.



figures analogues où interviennent les plans (a), (b), (c), (d).

Avec $a+b-c-d=0$, les côtés a et b ayant en commun le sommet B, les côtés c et d ayant en commun le sommet D, on a la figure 2 et des figures analogues où interviennent des plans (a), (b'), (c), (d'); on a, en effet

$$\beta=+1, \qquad \delta=+1.$$

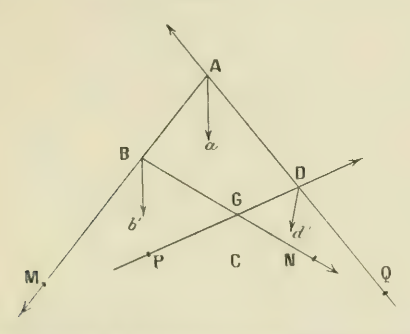
On peut remarquer que les plans a, b, c, d, ou a, b', c, d' perpendiculaires aux cordes QM, MN, NP, PQ du cercle MNPQ, ont une droite commune.

Si l'on veut, par la suite, avoir dans tous les cas

$$\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{DA}=0,$$

ce qui exige $\alpha = \gamma = -1$, $\beta = \delta = -1$, il faudra conserver, pour le premier des trois cas précédents, les axes AB, BC, CD, DA; changer pour le second cas le

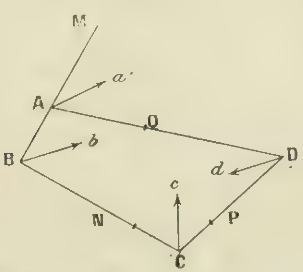
Fig. 2.



sens des axes n et p qui se croisent en C, changer pour le troisième cas le sens des axes p et q qui se croisent en D. En même temps, on pourrait désigner par a le plan perpendiculaire au plan de l'angle A mené par la pseudo-bissectrice de l'angle des axes qui se croisent en A, etc.; on mettrait b et d, au lieu de b' et d', dans la figure 2, où le sens d'un axe serait changé en B et en D (axes passant en C).

b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, le point Q, par exemple, est

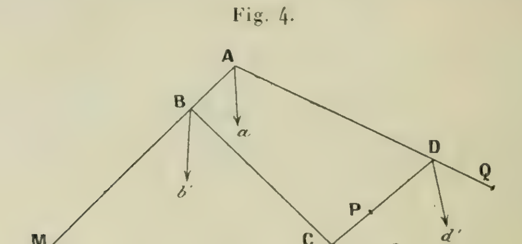
Fig. 3.



le conjugué harmonique, par rapport aux points D

et A, du point où la droite DA est rencontrée par le plan MNP; ou encore *les plans* MNP *et* MPQ *sont conjugués harmoniques par rapport aux plans*

Fig. 4.



(MP, AB) *et* (MP, CD). On a, par exemple, les figures 3 et 4, la première avec α seul positif (plan a'), la seconde avec α seul négatif (plan a).

La suite montrera que les deux cas précédents se présentent effectivement.

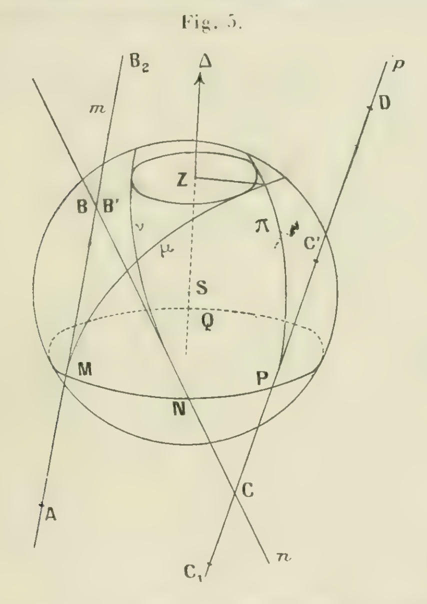
II.

2. Supposons donnée la sphère (S). Soient m et p (*fig.* 5) deux droites fixes tangentes à cette sphère aux points M et P. Pour obtenir une droite n qui s'appuie sur les droites m et p et qui soit tangente à la sphère, prenons un point B sur la droite m, considérons le petit cercle qui est la section de la sphère par le plan (B, p), cercle non représenté sur la figure, et menons du point B des tangentes à ce cercle : nous obtenons deux droites n et n' répondant à la question.

Soit BNC une de ces droites; si l'on reporte la division de points C, N, B sur la droite p en C, P, E, on a PE = NB = MB, et le point C est à l'intersection de la droite p avec le plan perpendiculaire à la droite BE en son milieu. La droite m étant orientée dans un sens

bien déterminée, si l'on [illegible]ente la droite p dans un certain sens, et si l'on prend $\overline{PE} = \overline{MB}$, le plan perpendiculaire à la droite BE en son milieu fait correspondre au point B un point unique C; si l'on oriente la droite p

Fig. 5.



dans le sens contraire au sens adopté d'abord, en prenant $\overline{PE'} = \overline{MB}$, on fera correspondre au point B un point unique C'; la correspondance entre les points B et C sur les droites m et p, correspondance doublement quadratique au premier abord, se décompose en deux correspondances homographiques (B, C) et (B', C'), *les droites n forment deux systèmes* (n) et (n'). Cela tient à ce que les directrices m et p sont tangentes à la sphère (S).

Soit BNC une position de la droite n; le plan MPN, déterminé par la droite fixe MP et le point variable N, est également incliné sur les droites m et n, sur les

droites n et p, donc sur les droites m et p qui sont données. Réciproquement, si N est un point de la sphère tel que le plan MNP soit également incliné sur les droites m et p, le plan tangent en N rencontre ces droites en des points B et C qui sont alignés avec le point N : la droite BC est tangente à la sphère, au point N. Or, il passe par MP deux plans, et deux seulement, qui sont également inclinés sur les droites m et p : ces plans passent par l'une ou l'autre des bissectrices des angles que forme, par exemple, la droite m avec la parallèle à la droite p menée par le point M; *le lieu des points* N *et* N′ *se compose donc de deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *passant en* M et P. (On arrive au même résultat, d'une manière moins simple, en projetant la division de points B, N, C parallèlement à MP sur le plan mené par la droite m parallèlement à la droite p.) Quand on se donne le point B, ainsi qu'on a fait au début de ce numéro, comme le cercle déterminé sur la sphère par le plan (B, p) rencontre chacun des deux cercles (Γ) et (Γ') en un seul point, N ou N′, distinct du point P, le point N par exemple est sur le cercle (Γ), le point N′ est sur le cercle (Γ').

La droite n est dans le plan tangent en N à la sphère, et fait avec le plan du cercle (Γ) un angle égal à celui que fait la droite fixe m avec ce même plan; de là cette conséquence : *Le lieu des droites n qui correspondent aux points* N *du cercle* (Γ) *est la surface de révolution* (Σ) *engendrée par la rotation de l'une des droites n autour de l'axe* (Δ) *du cercle* (Γ); *cette surface contient les droites m et p. Le lieu des droites n' qui correspondent aux points N′ du cercle* (Γ') *est de même la surface de révolution* (Σ')...; avec la disposition de la figure 5, le cercle (Γ') est à peu près de front, l'axe (Δ') est à peu près de bout.

La droite Δ est l'axe de la rotation qui amène la demi-droite Mm sur la demi-droite Pp, en amenant le point M au point P; la droite Δ' est de même l'axe de la rotation qui amène la demi-droite Mm sur la demi-droite opposée à la demi-droite Pp, en amenant le point M au point P. Deux tels axes existent *a priori* : pour obtenir le premier, on porte sur les demi-droites Mm et Pp deux vecteurs égaux MB et PE, et l'on prend l'intersection des deux plans perpendiculaires aux droites MP et BE en leurs milieux; on obtient le second d'une manière analogue en remplaçant le segment PE par le segment opposé PE'. Si l'on veut utiliser le point S, comme chacune des droites Δ, Δ' doit faire le même angle avec les deux droites m et p, on mènera par ce point S des parallèles aux droites m et p, on fera passer par les bissectrices des angles obtenus des plans perpendiculaires au plan des deux parallèles, et l'on coupera ces deux plans par le plan qui est perpendiculaire à la corde MP en son milieu [1]; on aura ainsi les axes (Δ) et (Δ').

Le point M est à la fois un point N et un point N'; la droite n_1, qui joint le point M au point d'intersection C_1 de la droite p avec le plan tangent en M à la sphère, est à la fois une droite n et une droite n'. Le point P est de même un point N et un point N'; la droite n_2, qui joint le point P au point d'intersection B_2 de la droite m avec le plan tangent en P, est à la fois une droite n et une droite n'. *Les deux surfaces* (Σ) *et* (Σ') *ont en commun les quatre droites* m, p, n_1, n_2.

---

[1] Les axes (Δ) et (Δ') sont, sur le paraboloïde hyperbolique équilatère qui est le lieu des points équidistants des droites m et p, les deux génératrices perpendiculaires à la corde MP; les plans directeurs de ce paraboloïde, si on les mène par le point S, sont les deux plans dont on vient de parler.

La corde MN du cercle (Γ) faisant constamment des angles égaux avec les droites m et n, la tangente en M à ce cercle est bissectrice de l'un des angles que forment les droites m et n_1; *les tangentes en* M *et* P *aux deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *sont les bissectrices des angles que forment les droites* m et n_1, *les droites* n_2 et p, *droites qu'on peut regarder comme les traces des deux plans* (MP, m) *et* (MP, p) *sur les plans tangents* M et P *à la sphère. Les deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *sont orthogonaux.* [Si l'on projette la division de points B, N, C, parallèlement à MP, sur le plan (m, n_1) qui est le plan tangent en M à la sphère, en menant CC″ parallèle à PM jusqu'à MC_1 et NN″ parallèle à PM jusqu'à BC″, on voit directement que la droite MN″, qui est la tangente en M au cercle MNP, est bissectrice de l'un des angles que forment les droites m et n_1; on a ainsi une nouvelle solution du problème proposé.]

3. Les deux plans (m, n) et (p, n) déterminent sur la sphère *deux petits cercles variables, tangents en* M *à un grand cercle* μ, *tangents en* P *à un grand cercle* π, *tangents entre eux au point* N; soit ν le grand cercle variable qui leur est tangent en N. On voit sur la figure (en imaginant le grand cercle qui est sur la sphère le lieu des points équidistants de M et de P), comment on peut obtenir l'enveloppe du grand cercle ν, et le lieu du point N. Les axes (Δ) et (Δ') se présentent ici comme les intersections par le plan perpendiculaire à la corde MP, en son milieu, des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans (S, m) et (S, p).

Dans le même ordre d'idées, *un point* N *est le point de contact d'une sphère de centre* B, *tangente en* M

à un plan fixe U *perpendiculaire à la droite m au point* M, *et d'une sphère de centre* C, *tangente en* P *à un plan fixe* W *perpendiculaire à la droite p au point* P. On peut obtenir le lieu du point N en cherchant d'abord l'enveloppe du plan V qui est tangent en N aux deux sphères considérées. Les axes (Δ) et (Δ') se présentent ici comme les intersections par le plan perpendiculaire à la corde MP, en son milieu, des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans U et W.

On pourrait, d'ailleurs, employer une inversion de pôle M pour traiter l'un ou l'autre des deux problèmes dont on vient de parler.

4. Si l'on prend deux droites AD et BC du système (n), on a un contour quadrangulaire ABCDA circonscrit à la sphère, les points de contact M, N, P, Q étant dans un même plan; il en est de même si l'on prend deux droites A'D' et B'C' du système (n'). Le contour est alors tracé sur un hyperboloïde de révolution. Si, à partir du cercle de gorge, on oriente m et p dans un certain sens, n et q dans le sens contraire, il suffit de projeter le contour sur l'axe de l'hyperboloïde pour obtenir la relation

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

inversement, on pouvait traduire cette relation, obtenue au paragraphe I, en disant que, *si* $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ *sont les semi-droites qui y donnent lieu, les semi-droites déduites de celles-là, en changeant le sens de la seconde et le sens de la quatrième, sont parallèles à quatre semi-génératrices d'un semi-cône de révolution.*

Si l'on prend une droite AD du système (n) et une droite B'C' du système (n'), on a un contour AB'C'DA,

pour lequel les points de contact M, N', P, Q ne sont pas dans un même plan; les plans MPN' et MPQ forment d'ailleurs un faisceau harmonique avec les plans MP, AB' et MP, C'D, soit parce que ces plans passent par l'une ou l'autre des bissectrices des angles que forme la droite m avec la parallèle à la droite p menée par le point M, soit parce que les traces des quatre plans sur le plan tangent en M à la sphère sont le système formé par deux droites m, n_1 et les bissectrices de leurs angles.

Inversement, les faits établis au paragraphe I auraient permis d'établir que le lieu des points N et N' se compose de deux cercles : on aurait considéré une droite fixe AQD, tangente à la sphère au point Q, et les tangentes mobiles BNC, BN'C'; mais ce n'est pas là, évidemment, ce que demandait l'énoncé.

III.

5. Supposons maintenant donné le contour ABCDA, et cherchons les sphères (S) tangentes aux quatre côtés. *Si l'on veut d'abord une telle sphère avec points de contact dans un même plan, le contour doit vérifier une relation de la forme*

$$a + \beta . b + \beta\gamma . c - \beta\gamma\delta . d = 0;$$

ou encore les quatre droites m, n, p, q *doivent être parallèles à quatre génératrices d'un cône de révolution*, ce qui donne le moyen de réaliser le contour. Or, d'après ce qui précède, le système formé par un contour quadrangulaire et une sphère tangente aux quatre côtés, même pour le cas où les points de contact doivent être dans un même plan, dépend de 12 paramètres, à savoir : 4 paramètres pour la sphère, 6 paramètres pour les deux droites m et p, 2 para-

mètres pour les droites n et q. Comme le contour ABCDA ne dépend ici que de 11 paramètres, la sphère (S) doit dépendre d'un paramètre [1]. Ce raisonnement suppose d'ailleurs que la propriété indiquée est la seule que possède un contour quadrangulaire circonscrit à une sphère, avec points de contact dans un même plan; on verra qu'il en est bien ainsi.

Prenons le point M à volonté sur la droite m (*fig.* 1 ou 2), et déterminons les points N, P, Q par les relations nécessaires

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \qquad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP},$$

les valeurs de β, γ, δ étant celles qui figurent dans la relation

$$\overline{AB} + \beta.\overline{BC} + \beta\gamma.\overline{CD} + \beta\gamma\delta.\overline{DA} = 0$$

vérifiée par le contour; un calcul inverse de celui du paragraphe I donne

$$\alpha.\overline{AM} = \overline{AQ},$$

avec $\alpha\beta\gamma\delta = 1$. Les points M, N, P, Q sont dans un même plan Π.

Il faut montrer que ces points appartiennent à un cercle. On a vu comment, par une orientation conve-

---

[1] Quand on crée un contour quadrangulaire circonscriptible à une sphère, avec points de contact dans un même plan, en partant de la sphère (*fig.* 5), il semble au premier abord que ce contour dépend de 12 paramètres, dont 4 pour la sphère; mais il se trouve que le même contour peut être obtenu à partir d'une infinité de sphères, de sorte que la sphère fournit seulement 3 paramètres pour le contour.

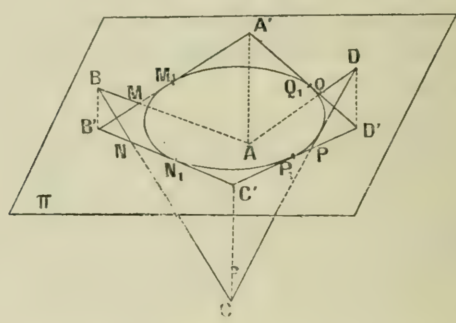
J'observe en passant que les notions de paramètre et de condition devraient être introduites dans l'enseignement tout au début de l'étude de la Géométrie, à propos du parallélogramme par exemple.

nable des droites m, n, p, q, on peut avoir

$$\overline{AM} = -\overline{AQ}, \qquad \overline{BN} = -\overline{BM}, \qquad \ldots,$$
$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

supposons les droites ainsi orientées. Projetons la figure sur le plan Π (*fig.* 6), et soient A', B', C', D' les

Fig. 6.



projections des points A, B, C, D; prenons comme axes m', n', ..., les projections des axes m, n, ... Les droites AB, BC, ... étant également inclinées sur le plan MNPQ, on a

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times k, \qquad \overline{B'C'} = \overline{BC} \times k, \qquad \ldots,$$

et la relation ci-dessus donne

$$\overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \overline{C'D'} - \overline{D'A'} = 0;$$

il en résulte, comme on sait, que les axes m', n', ..., sont tangents à un cycle, en des points M_1, N_1, P_1, Q_1. On a d'ailleurs

$$\overline{B'M} = -\overline{B'N} \qquad \text{et aussi} \qquad \overline{B'M_1} = -\overline{B'N_1},$$

$B'M_1$ et $B'N_1$ étant deux tangentes menées d'un point à un cycle; on en déduit la première des relations

$$\overline{M_1M} = -\overline{N_1N} = \overline{P_1P} = -\overline{Q_1Q};$$

les points M, N, P, Q *appartiennent à un cercle concentrique au cercle* $M_1 N_1 P_1 Q_1$.

Considérons alors la sphère qui passe par le cercle MNPQ et qui est tangente en M à la droite AB (le contour ABCD étant supposé gauche); cette sphère est tangente en N à la droite BC puisque l'on a BN = BM, ...; elle est bien tangente aux quatre côtés du contour.

Observons maintenant que les plans II sont parallèles entre eux : en effet, le rapport $\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$ étant constant, les droites MN sont parallèles entre elles, et il en est de même des droites NP, ... Imaginons que l'on projette la figure sur un plan fixe (π) parallèle à la direction des plans (II), la projection du point A étant désignée par a, celle du point M par m, celle du point M_1 par m_0 (on en verra plus loin la raison); soit Δ la perpendiculaire au plan (π) menée par le centre ω du cycle tangent aux quatre axes qui portent les côtés ab, bc, ... Les cercles MNPQ ayant leurs centres sur la droite Δ, cette droite est le lieu des centres des sphères (S); c'est la droite commune aux quatre plans a, b, c, d de la figure 1, ou aux quatre plans a, b', c, d' de la figure 2. Celle des sphères (S) qui a le plus petit rayon s'obtient en mettant les points m, n, p, q en m_0, n_0, p_0, q_0; les points M, N, P, Q occupent alors certaines positions M_0, N_0, P_0, Q_0.

6. Si l'on imagine, pour plus de clarté, que l'on a pris comme plan (π) le plan (II_0) qui contient les points M_0, N_0, P_0, Q_0, on voit que le contour quadrangulaire ABCDA, avec l'hypothèse

$$a + \beta.b + \beta\gamma_1.c + \beta\gamma_1.d = 0,$$

relative au système d'axes AB, BC, ..., appartient à

une surface (Σ) engendrée par une droite tournant autour d'un axe Δ (*cf.* ci-dessus). Cette surface est le lieu des cercles MNPQ, l'enveloppe des sphères (S). Réciproquement, si l'on considère un contour quadrangulaire ABCDA tracé sur une surface (Σ), en orientant les génératrices de manière que leurs projections sur le plan (Π_0) du cercle de gorge soient tangentes à un cycle porté par ce cercle de gorge, on a en projection

$$\overline{ab} - \overline{bc} - \overline{cd} - \overline{da} = 0,$$

et, par suite,

$$\overline{AB} - \overline{BC} - \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

on aurait encore cette relation en projetant sur l'axe de révolution de la surface (Σ). Il existe une série continue de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan; ce sont les sphères qui sont tangentes à la surface (Σ) le long d'une parallèle. *Cette réciproque est intuitive.*

Une surface (Σ), définie à partir d'un contour quadrangulaire qui doit vérifier la relation ci-dessus, dépend de 11 — 4 ou 7 paramètres, puisque chacune des quatre droites m, n, p, q a un degré de liberté. Comme toute surface (Σ) peut être obtenue ainsi, une telle surface dépend de 7 paramètres; et, en effet, une surface (Σ) est définie par son axe (4 paramètres) et par une génératrice ayant un degré de liberté (3 paramètres).

7. Dans ce qui précède, on s'est un peu écarté de l'énoncé dont la rédaction laisse ici à désirer. Si l'on voulait supposer l'existence d'une sphère tangente aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan, sous la condition nécessaire

$a + \beta b + \ldots = 0$, on saurait, d'après la seconde partie, que le contour est tracé sur un hyperboloïde de révolution, et les sphères inscrites à cet hyperboloïde seraient des solutions du problème ; cela ne prouverait pas, d'ailleurs, qu'il n'y en ait pas d'autres. Sans recourir à la seconde partie, on saurait que les quatre plans a ou a', b ou b', ... qui sont perpendiculaires aux cordes QM, MN, NP, PQ du cercle MNPQ ont une droite commune (Δ), et l'on pourrait utiliser ce fait pour résoudre la question posée. On doit en réalité, comme nous l'avons fait, supposer simplement que le contour satisfait à la condition nécessaire $a + \beta b + \ldots = 0$, et chercher *à partir de là* les sphères demandées.

8. *Proposons-nous maintenant d'obtenir une sphère* (S) *avec points de contact non situés dans un même plan, le contour* ABCD *étant d'ailleurs quelconque*. Si l'on pose

$$\overline{AM} = x, \qquad \overline{BN} = y, \qquad \overline{CP} = z, \qquad \overline{DQ} = t,$$

en orientant les droites m, n, p, q de A vers B, de B vers C, ..., les conditions nécessaires $\alpha . \overline{AM} = \overline{AQ}$, ..., se traduisent, quel que soit le cas envisagé, par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha x = t - d, \\ \beta y = x - a, \\ \gamma z = y - b, \\ \delta t = z - c; \end{cases}$$

on en déduit, en posant $\alpha\beta\gamma\delta = \varepsilon$,

$$(2)\qquad \begin{cases} (1-\varepsilon)x = a + \beta . b + \beta\gamma . c + \beta\gamma\delta . d, \\ (1-\varepsilon)y = b + \gamma . c + \gamma\delta . d + \gamma\delta\alpha . a, \\ (1-\varepsilon)z = c + \delta . d + \delta\alpha . a + \delta\alpha\beta . b, \\ (1-\varepsilon)t = d + \alpha . a + \alpha\beta . b + \alpha\beta\gamma . c; \end{cases}$$

mais, pour former un système équivalent au système (1), nous écrirons, par exemple

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (1-\alpha\beta\gamma\delta)x &= a+\beta.b+\beta\gamma.c+\beta\gamma\delta.d,\\ \beta.\overline{BN} &= \overline{BM},\\ \gamma.\overline{CP} &= \overline{CN},\\ \delta.\overline{DQ} &= \overline{DP}.\end{aligned}\right.$$

L'hypothèse $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ (points M, N, P, Q dans un même plan) exige que le contour vérifie une relation de la forme

$$a+\beta.b+\beta\gamma.c+\beta\gamma\delta.d = 0,$$

et correspond aux sphères étudiées précédemment pour un tel contour : les conditions (3), conditions nécessaires, se réduisent alors aux trois dernières; nous devons laisser de côté cette hypothèse, et prendre ici

$$\alpha\beta\gamma\delta = -1.$$

Pour chaque système de valeurs de α, β, γ, δ vérifiant cette relation (il y en a huit), les formules (3) fournissent quatre points M, N, P, Q non situés dans un même plan. Ces quatre points déterminent une sphère, et *je dis que cette sphère est bien tangente aux quatre droites qui portent les côtés du contour;* en effet, si l'on désigne par M', N', P', Q' les points où elle coupe encore ces droites, on a

$$\begin{aligned} xx' &= (t-d)(t'-d), &\qquad& \alpha x' = t'-d,\\ yy' &= (x-a)(x'-a), &\text{d'où}\qquad& \beta y' = x'-a,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

de sorte que x', y', z', t' sont égaux à x, y, z, t.

D'après la relation $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, à chaque système de valeurs des quantités α, β, γ, δ correspond le système de valeurs obtenu en changeant tous les signes; on peut ainsi classer les huit solutions en quatre

groupes de deux solutions :

α seul positif, solution (1),
α seul négatif, solution (1′),

et l'on a de même les solutions (2) et (2′), ... Les figures 3 et 4 représentent une solution (1) et une solution (1′), avec indication des plans (a', b, c, d) ou (a, b', c', d') qui déterminent le centre de la sphère.

9. Examinons ce que deviennent ces solutions isolées lorsque le contour vérifie une relation de la forme

$$a + \beta' b + \beta'\gamma'.c + \beta'\gamma'\delta'.d = 0,$$

soit α' défini pour l'égalité

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta' = +1.$$

Dans la série continue de solutions qui correspond aux valeurs $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ..., se trouve une sphère tangente en A au plan de l'angle A; on a alors $x = 0$, $t = d$, ... Ces valeurs satisfont au système (1) pour $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, $\alpha = \pm\alpha'$ indifféremment; en prenant $\alpha = -\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, on aura donc une solution isolée, avec $x = 0$, $t = d$, ..., c'est-à-dire une sphère tangente en A au plan de l'angle A. On aura de même, parmi les solutions isolées, une sphère tangente B au plan de l'angle B, ... Les quatre autres solutions isolées ne présentent rien de remarquable, et sont d'ailleurs en dehors de la série continue de solutions.

Examinons d'un peu près les trois cas signalés au n° 1

$$\alpha' = \gamma' = -1, \quad \alpha' = \gamma' = -1, \quad \alpha' = \gamma' = +1,$$
$$\beta' = \delta' = -1, \quad \beta' = \delta' = +1, \quad \beta' = \delta' = -1.$$

Avec

$$a - b + c - d = 0,$$

qui correspond à

$$\alpha' = -1, \quad \beta' = -1, \quad \gamma' = -1, \quad \delta' = -1:$$

les solutions dont on vient de parler s'obtiennent, comme solutions isolées, en donnant à α, β, γ, δ les valeurs

(1)	1,	−1,	−1,	−1,
(2)	−1,	1,	−1,	−1.
	.....	..,	.....	...:

ce sont les solutions (1, 2, 3, 4). *On obtient les centres des sphères considérées ici en coupant la droite* Δ, *intersection commune des plans* a, b, c, d (*fig.* 1), *par les plans* a', b', c', d'. Pour la solution (1), les points M et Q des figures 1 et 3 sont confondus en A.

Avec

$$a + b - c - d = 0,$$

qui correspond à

$$\alpha' = -1, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = -1, \quad \delta' = 1,$$

les solutions en question s'obtiennent, comme solutions isolées, en donnant à α, β, γ, δ les valeurs

(3')	1,	1,	−1,	1.
(4)	−1,	−1.	−1,	1,
(1')	−1,	1,	1,	1,
(2)	−1,	1,	−1,	−1;

ce sont les solutions (3', 4, 1', 2). *On obtient les centres des sphères considérées ici en coupant la droite* Δ, *intersection commune des plans* a, b', c, d' (*fig.* 2) *par les plans* a', b, c', d. Pour la solution (1'), les points N et P des figures 2 et 4 sont confondus en C.

Avec

$$a - b - c + d = 0,$$

on aurait les solutions (3, 4', 1, 2'). Pour la solution (1), les points N et P de la figure 3 seraient confondus en C.

10. α. On peut avoir à la fois

$$a - b + c - d = 0,$$
$$a - b - c - d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = d, \qquad b = c.$$

Le plan bissecteur a du dièdre que forment les demi-plans ACB et ACD est un plan de symétrie pour le contour; les deux plans b et b' (*fig.* 1 et 2) coupent ce plan a suivant deux droites Δ_1 et Δ_2 dont chacune est un lieu de centre de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan; ces deux droites ont un point commun O.

Que deviennent les huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général? Les plans (a, c, b, d, b', d') ayant en commun le point O (*fig.* 1 et 2), deux de ces sphères se confondent avec la sphère de centre O, commune aux deux systèmes continus de solutions, et qui est tangente en B aux droites BA et BC, en D aux droites DA et DC; deux autres ont leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_1 ou (a, c, b, d) par les plans a' et c', et sont tangentes en A aux droites AB et AD, ou en C aux droites CB et CD; deux autres ont de même leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_2 ou (a, c, b', d') par les plans a' et c', et sont encore tangentes en A aux droites AB et AD, ou en C aux droites CB et CD; les deux dernières, qui sont vraiment des solutions isolées, ont leurs centres aux deux points (d, b', a', c') et (b, d', a', c') : l'une cor-

respond aux valeurs $\overline{AM} = \overline{AQ} = b$, $\overline{CN} = \overline{CP} = -a$, et l'autre aux valeurs opposées.

β. On peut de même avoir à la fois

$$a + b - c - d = 0,$$
$$a - b - c + d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = c, \qquad b = d,$$

les côtés opposés étant égaux deux à deux. Les quatre plans a, b', c, d' (*fig.* 2) se coupent suivant une droite Δ_2, les quatre plans a', b, c', d se coupent suivant une droite Δ_3, et chacune de ces deux droites est un lieu de centres de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan.

Des huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général, quatre ont leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_2 par les plans qui déterminent la droite Δ_3, et sont respectivement tangents en A aux droites AD et AB, en B aux droites BA et BC, ...; les quatre autres ont de même leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_3 avec les plans qui déterminent la droite Δ_2, etc.

γ. Enfin, on peut avoir à la fois

$$a - b + c - d = 0,$$
$$a + b - c - d = 0,$$
$$a - b - c + d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = b = c = d.$$

Chacune des trois droites (a, b), (a, b', d'), (b, a', c'), ou Δ_1, Δ_2, Δ_3, est un lieu de centres de sphères tangentes au quatre côtés du contour, avec points de con-

tact dans un même plan; les deux dernières de ces droites rencontrent la première en deux points O et Ω. Des huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général, deux se confondent avec la sphère de centre O qui est tangente en B aux droites BA et BC, en D aux droites DA et DC; deux autres se confondent de même avec la sphère de centre Ω qui est tangente en A aux droites AB et AD, en C aux droites CB et CD; deux ont leurs centres sur la droite (a, b', d') ou $(c, b' d')$, droite Δ_2, aux points où elle est coupée par les plans a' et c', et sont tangentes en A ou en C au plan de l'angle A ou de l'angle C; deux ont de même leurs centres sur la droite (b, a', c') ou (d, a', c'), droite Δ_3, ...

11. Relativement à l'hypothèse $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, pour laquelle il y a impossibilité ou indétermination, *la notion de correspondance donne naturellement la meilleure compréhension des choses par l'introduction d'un invariant;* et cette même notion présente d'une manière intéressante la solution qui correspond à un système de valeurs de α, β, γ, δ vérifiant la relation $\alpha\beta\gamma\delta = -1$.

Le contour ABCDA étant quelconque, prenons arbitrairement un point M sur la droite m, et déterminons sur les droites n, p, q, m les points N, P, Q, M_1, par les conditions

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \quad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \quad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP}, \quad \alpha.\overline{AM_1} = \overline{AQ}.$$

L'ensemble des points M est symétrique de l'ensemble des points N par rapport au plan b si $\beta = -1$, par rapport au plan b' si $\beta = +1$; l'ensemble des points N est de même symétrique de l'ensemble des points P, et ainsi de suite; dès lors *la division formée par les points* M_1 *est égale à la division formée par les points* M.

Pour $\beta = -1$, les divisions (M) et (N) sont de sens contraire sur les axes m et n; de là deux cas :

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = +1$, *les deux divisions* (M) *et* (M_1) *sont de même sens sur l'axe* m; elles sont généralement distinctes, et le point M_1 ne peut se confondre avec le point M; si les deux divisions sont confondues, on a pour tout point M

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \dots, \qquad \alpha.\overline{AM} = \overline{AQ},$$

et l'on achève comme précédemment;

b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, les deux divisions (M) et (M_1) sont de sens contraires sur l'axe m, les points M et M_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain point de la droite m, et l'on doit mettre M en ce point; on achève comme précédemment.

12. Pour préciser ce qui précède, observons que les égalités

$$\begin{aligned} a &= \overline{AM} - \beta.\overline{BN}, \\ b &= \overline{BN} - \gamma.\overline{CP}, \\ c &= \overline{CP} - \delta.\overline{DQ}, \\ d &= \overline{DQ} - \alpha.\overline{AM_1} \end{aligned}$$

donnent

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = \overline{AM} - \alpha\beta\gamma\delta.\overline{AM_1}.$$

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, on a

$$\overline{M_1M} = a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d.$$

d'où la condition

$$a + \beta b + \ldots = 0.$$

b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, on a pour l'abscisse du milieu du segment MM_1

$$\frac{\overline{AM} + \overline{AM_1}}{2} = \frac{a + \beta b + \ldots}{2}.$$

[R8a]

SUR LE CALCUL DE LA FORCE VIVE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL;

Par M. Ét. DELASSUS,

1. La méthode classique de Gilbert pour former les équations de Lagrange, dans le cas où le trièdre de référence est mobile, repose sur la considération de forces fictives et, au lieu de calculer la force vive du système, on calcule une certaine force vive d'entraînement et un certain travail donnant lieu à une fonction de force généralisée, c'est-à-dire dépendant de t. Si l'on reprend les notations adoptées par M. Appell, on a les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + \frac{\partial K}{\partial q}$$

ou, puisque K ne dépend pas des q',

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T+K)}{\partial q'}\right] - \frac{\partial(T+K)}{\partial q} = Q,$$

c'est-à-dire les équations de Lagrange qu'on aurait obtenues si l'on avait calculé la force vive absolue du système. Il en résulte que *la fonction* $T + K$ *est une force vive équivalente à la force vive vraie du système matériel* [1].

2. Il est facile de voir que le calcul direct de la force

[1] Voir mon article *Sur les forces vives equivalentes* (*Nouvelles Annales*, 1912).

vive absolue conduit immédiatement aux équations de Gilbert si l'on utilise cette notion de forces vives équivalentes.

Soient T_1 un trièdre fixe, T un trièdre mobile et T_2 un trièdre auxiliaire ayant la direction fixe de T_1 et l'origine mobile de T.

Soient ω et V les éléments de réduction en O (origine de T) de la vitesse du trièdre T.

La vitesse relative de T par rapport à T_2 est la rotation ω et la vitesse absolue de T_2 est la translation V.

Soient v_1, v, v_2, les vitesses d'un point quelconque par rapport aux trois trièdres et v' sa vitesse par rapport à T_2 quand on le considère comme attaché à T. On a les deux égalités géométriques

$$v_1 = V + v_2,$$
$$v_2 = v' + v,$$

d'où l'on déduit les deux égalités algébriques

$$v_1^2 = V^2 + 2Vv_2\cos(V, v_2) + v_2^2,$$
$$v_2^2 = v'^2 + 2v'v\ \cos(v', v) + v^2,$$

et, par addition, multiplication par m, puis sommation pour tout le système

$$\Sigma mv_1^2 = MV^2 + \Sigma mv^2 + \Sigma mv'^2 + 2\Sigma mv'v\cos(v', v) + 2V\Sigma mv_2\cos(V, v_2),$$
$$T = T_0 + T_r + \mathcal{G} + \mathcal{V} + K.$$

3. Les cinq termes précédents ont des interprétations immédiates :

$2T_0$ est la force vive de l'origine mobile,

$2T_r$ est la force vive relative du système,

$2\mathcal{G}$ est la force vive d'entraînement produite par la rotation ω. C'est donc

$$I_\omega \omega^2,$$

$I\omega$ étant le moment d'inertie par rapport à la droite ω, $\mathfrak{V}$ s'interprète comme il suit. On a

$$v_e = \mathrm{M}'_{\mathrm{M}}\,\omega,$$

on le projette sur la quantité de mouvement relatif mv de ce point et l'on multiplie par mv. On a ainsi le moment de ω et de mv et en faisant la somme on a

$$\mathfrak{V} = \mathrm{M}'(\omega, \mathrm{Q}_r),$$

Q_r étant la quantité de mouvement relatif.

Pour obtenir l'expression de K, on remarque que $mv_2 \cos(\mathrm{V}, v_2)$ est la projection sur V de la quantité de mouvement mv_2 de sorte que la somme qui figure dans K est la projection sur V de la résultante générale de la quantité de mouvement par rapport à T_2, c'est-à-dire de la quantité de mouvement analogue du centre de gravité. Si donc nous désignons par V_2 la vitesse relative de ce centre de gravité dans le trièdre T_2 on aura

$$\mathrm{K} = \mathrm{MVV}_2 \cos(\mathrm{V}, \mathrm{V}_2).$$

4. Soient a, b, c, λ, μ, ν les coordonnées du centre de gravité et les composantes de V dans le trièdre T_2. On a, d'après l'expression précédente de K,

$$\begin{aligned}\mathrm{K} &= \mathrm{M}(\lambda a' + \mu b' + \nu c')\\ &= \frac{d}{dt}[\mathrm{M}(\lambda a + \mu b + \nu c)] - \mathrm{M}(\lambda' a + \mu' b + \nu' c).\end{aligned}$$

Soient L le vecteur OG et J l'accélération du point O. On pourra alors écrire

$$\mathrm{K} = \frac{d}{dt}[\mathrm{MVL}\cos(\mathrm{V}, \mathrm{L})] - \mathrm{MJL}\cos(\mathrm{J}, \mathrm{L}).$$

5. En général, les composantes λ, μ, ν de V dépen-

dent des q et des q'. Plaçons-nous dans le cas particulier où s'applique la méthode de Gilbert, c'est-à-dire : *supposons que l'origine des axes mobiles soit animée d'un mouvement donné à l'avance.* Les composantes λ, μ, ν sont alors des fonctions données de t, et comme a, b, c ne dépendent que de la position du système, c'est-à-dire des q et de t, mais pas des q', on voit que l'on a

$$\mathrm{MVL}\cos(\mathrm{V}, \mathrm{L}) = f(q_1, \ldots, q_n, t),$$

le premier terme de K étant alors la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps, on peut le supprimer ainsi que le terme T_0 qui est ici une fonction donnée de t et l'on obtient ainsi *la force vive :*

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_r + \mathcal{G} - \mathcal{V} + \mathrm{K}',$$
$$\mathrm{K}' = -\,\mathrm{MJL}\cos(\mathrm{J}, \mathrm{L})$$

qui est équivalente à la force vive vraie et qui n'est autre que celle qui figure en réalité dans les équations de Gilbert.

6. Il est à remarquer que le calcul précédent donne, comme cas particuliers, les méthodes ordinaires de calcul de la force vive.

Si l'on suppose que le trièdre T a pour origine le centre de gravité G et a une direction fixe, ω et V_2 sont nulles, de sorte que $\mathcal{G}$, $\mathcal{V}$ et K sont nuls et que la formule se réduit à

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_r,$$

ce qui constitue le théorème classique de König.

Si le système est un solide et si le trièdre T lui est attaché, T_r et Q_r sont nulles, donc aussi $\mathcal{V}$ et la formule se réduit à

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \frac{1}{2}\omega^2 \mathrm{I}_\omega + \mathrm{K}.$$

Si l'origine est le centre de gravité, V_2, donc aussi K, est nulle et l'on retrouve le calcul de la force vive d'un solide au moyen de l'ellipsoïde central d'inertie.

Si le solide a un point fixe, qu'on prend comme origine du trièdre attaché à ce solide, T_0 est nulle ainsi que K, puisque V est nulle, et il reste

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 I_\omega,$$

ce qui ramène au calcul de la force vive au moyen de l'ellipsoïde d'inertie du point fixe.

[R8a]

SUR L'ÉQUILIBRE PARAMÉTRIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS;

Par M. Ét. DELASSUS.

1. Nous dirons qu'un système aux paramètres indépendants ou non $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et soumis à des forces données $\mathcal{F}$ est en *équilibre paramétrique* pour le système $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$ si les équations du mouvement intégrées avec les conditions initiales

$$q_1 = q_1^0, \quad q_2 = q_2^0, \quad \ldots, \quad q_n = q_n^0,$$
$$q_1'^0 = q_2'^0 = \ldots = q_n'^0 = 0$$

donnent pour les q des fonctions de t qui sont constantes.

Cette définition comprend, comme cas particuliers, l'équilibre absolu et l'équilibre relatif.

Pour exprimer qu'il y a équilibre paramétrique pour $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$, il suffit, dans les équations du mouvement, de remplacer les q par les q^0, les q' et

les q'' par zéro et d'écrire que les égalités ainsi obtenues sont vérifiées quelle que soit la variable t. Ces égalités

$$(1) \quad f_1(q_1^0, \ldots, q_n^0, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n(q_1^0, \ldots, q_n^0, t) = 0$$

sont en nombre égal ou inférieur à celui des paramètres. En écrivant que ce sont des identités en t, on arrive à des impossibilités ou à des décompositions et alors à un nombre d'équations supérieur à celui des inconnues q^0, de sorte que ce n'est que pour des problèmes choisis d'une façon particulière que l'équilibre paramétrique peut exister.

Si, au contraire, t ne figure pas explicitement dans les équations du mouvement, il ne figure pas dans les équations (1) et l'on a ainsi au plus n équations pour déterminer les n inconnues q^0, de sorte qu'il existe normalement des systèmes q^0 pour lesquels il y a équilibre paramétrique.

Considérons alors la classe très générale des problèmes de mouvement de systèmes holonomes possédant une fonction génératrice. Les équations du mouvement contiendront ou non explicitement le temps suivant que cette variable figurera ou ne figurera pas explicitement dans la fonction génératrice et, dans ce dernier cas, le problème admet l'intégrale des forces vives de M. Painlevé, telle que nous l'avons définie antérieurement; donc :

Les seuls problèmes holonomes et à fonction génératrice possédant normalement des équilibres paramétriques sont ceux qui possèdent l'intégrale des forces vives.

Nous supposerons donc, dans ce qui suivra, que le problème admet une fonction de forces (pouvant

dépendre de t), c'est-à-dire des fonctions génératrices, et que, parmi celles-ci, il y en a qui soient indépendantes de t; nous désignerons par G l'une d'elles.

2. Soit $G_2 + G_1 + G_0$ la fonction G décomposée en groupes homogènes. De ce que t n'y figure pas, résulte immédiatement que si, dans les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial q'}\right) - \frac{\partial G}{\partial q} = 0,$$

on annule tous les q' et les q'', on obtient les équations

$$\frac{\partial G_0}{\partial q_1} = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial G_0}{\partial q_n} = 0,$$

c'est-à-dire les équations du maximum ou du minimum de G_0.

La démonstration classique du théorème de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre absolu repose sur les propriétés suivantes :

1° On a l'intégrale des forces vives

$$T = U + h;$$

2° T est une forme quadratique des q', homogène et positive;

3° L'équilibre est fourni par un système de valeurs des paramètres pour lequel la fonction U a un maximum isolé.

Dans le cas général de l'équilibre paramétrique, nous retrouvons l'intégrale des forces vives

$$G_2 = G_0 - h,$$

où G_2 et G_0 ont respectivement les mêmes propriétés que T et U, de sorte que la démonstration du théorème

de Dirichlet et les conséquences immédiates que l'on en tire s'appliquent sans aucune modification. Ainsi :

L'équilibre paramétrique, fourni par un système de valeurs des paramètres, est certainement stable si ce système donne un maximum isolé de la fonction G_0.

3. On peut toujours supposer que cet équilibre stable soit fourni par les valeurs nulles des paramètres et donne, pour G_0, une valeur nulle.

Si l'on prend des conditions initiales q^0 et q'^0 infiniment petites, les q et les q' resteront infiniment petits pendant tout le mouvement ultérieur et l'on obtiendra les équations de ce mouvement en développant G et ne conservant que les termes du second ordre.

Il est à remarquer que G_2 et G_0 commencent par de tels termes, mais que G_1 commence par des termes du premier ordre; ces termes forment une fonction des q', linéaire et à coefficients constants, donc dérivée exacte d'une fonction des q; d'après la notion d'équivalence des forces vives, ils disparaissent d'eux-mêmes dans la formation des équations de Lagrange; on peut ne pas en tenir compte et considérer le développement de G_1 comme commençant seulement aux termes du second ordre.

Si l'on ne conserve alors, comme première approximation, que les termes infiniment petits du second ordre, G se réduit à une fonction

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_0,$$

Γ_2 étant une forme quadratique aux q', homogène, à coefficients constants et essentiellement positive, Γ_1 une forme bilinéaire aux q, q', homogène et à coefficients constants et Γ_2 une forme quadratique aux q,

homogène à coefficients constants et essentiellement négative.

Au moyen de cette fonction génératrice réduite, les équations des petits mouvements deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial q'}\right) + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q}\right] - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial q} = 0$$

et sont des équations linéaires et homogènes à coefficients constants.

4. Les équations précédentes des petits mouvements s'appliquent, même si les conditions de Dirichlet ne sont pas satisfaites, et leur étude permet de voir si l'équilibre paramétrique est stable ou instable. La discussion générale est impraticable; bornons-nous au cas d'un seul paramètre. On a alors

$$G = f(q)q'^2 + \varphi(q)q' + \psi(q)$$

et la portion

$$G_1 = \varphi(q)q'$$

étant une dérivée exacte est à supprimer, de sorte qu'on doit prendre seulement

$$G = f(q)q'^2 + \psi(q).$$

Les équilibres paramétriques seront donnés par

$$\psi'(q) = 0;$$

soit q_0 l'un d'eux, posons

$$q = q_0 + p,$$

on aura

$$G = f(q_0 + p)p'^2 + \psi(q_0 + p),$$

d'où

$$\Gamma = f(q_0)p'^2 + \frac{1}{2}\psi''(q_0)p^2$$

et l'équation de Lagrange des petits mouvements

$$f(q_0)p'' - \frac{1}{2}\psi''(q_0)p = 0$$

ou

$$p'' = \frac{\psi''(q_0)}{2f(q_0)} p.$$

Si $\frac{\psi''(q_0)}{2f(q_0)}$ est positif, l'intégration se fera par des exponentielles, p contiendra des termes croissant indéfiniment avec le temps et l'équilibre sera instable. Si cette quantité est nulle, p sera fonction linéaire du temps et l'on arrivera à la même conclusion.

Enfin, si elle est négative, p ne contiendra que des termes trigonométriques et l'équilibre sera stable.

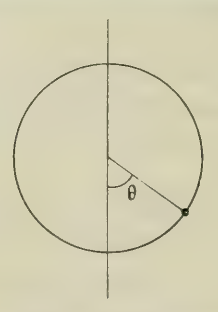
Remarquons que $f(q_0)$ étant forcément positif, la discussion précédente est déterminée par le signe de $\Psi''(q_0)$, de sorte que :

L'équilibre paramétrique est stable si $\psi''(q_0)$ est négatif et instable s'il est nul ou positif.

Et comme la condition

$$\psi''(q_0) < 0$$

est la condition d'un maximum de ψ, on voit qu'on



a ainsi, dans ce cas, la réciproque du théorème de Dirichlet.

Par exemple, pour le problème du régulateur de Watt, on a

$$G = m R^2 \theta'^2 + m R^2 \sin^2\theta\, \omega^2 + 2 m g R \cos\theta,$$

donc l'équation d'équilibre paramétrique

$$\frac{\partial G_0}{\partial \theta} = 2m R^2 \sin\theta \cos\theta\, \omega^2 - 2mg R \sin\theta = 0$$

qui donne les solutions

$$\theta = 0, \qquad \theta = \pi, \qquad \cos\theta_1 = \frac{g}{R\omega^2},$$

la dernière n'étant réelle que si

$$\frac{g}{R\omega^2} < 1.$$

On a

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2} = 4m R^2 \omega^2 \cos^2\theta - 2mg R \cos\theta - 2m R^2 \omega^2;$$

ce qui donne les signes suivants avec leurs conséquences

$g > R\omega^2$.

θ.	$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2}$.	
0	—	éq. stable
π	+	éq. instable

$g < R\omega^2$.

θ.	$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2}$.	
0	+	éq. instable
θ_1	—	éq. stable
π	+	éq. instable

[A3k]

ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette équation a été donnée par Painvin (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. XIX, p. 407, et *Principes de Géométrie analytique*, t. I, p. 111). Painvin l'a obtenue par un calcul direct, assez pénible; la connaissance

du résultat permet d'y arriver avec fort peu de calcul.

Si l'on considère l'une des six valeurs en question, son inverse et son complément à 1 sont également au nombre des valeurs en question ; les six valeurs sont

$$(1) \qquad r, \quad 1-r, \quad \frac{1}{1-r}, \quad \frac{r}{r-1}, \quad \frac{r-1}{r}, \quad \frac{1}{r}.$$

Considérons deux cas particuliers.

1° Si l'une des valeurs est -1, les six valeurs sont

$$-1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad -1;$$

ce sont les racines de l'équation

$$(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2-r+1)^3 = 0.$$

Si l'on observe que l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, on voit que cette équation est de la forme

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \mathrm{H};$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

Si a, b, c, d sont les racines de l'équation

$$\mathrm{A}x^4 + 4\mathrm{B}x^3 + 6\mathrm{C}x^2 + 4\mathrm{D}x + \mathrm{E} = 0,$$

en posant

$$S = AE - 4BD + 3C^2, \qquad T = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix},$$

on trouve facilement que les hypothèses $r = 1$, $r^2 - r + 1 = 0$ correspondent aux relations $T = 0$, $S = 0$. On peut donc écrire

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(k\frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Pour $S^3 = 27T^2$, deux des quantités a, b, c, d sont égales, les valeurs de r sont 0, 0, ∞, ∞, 1, 1, ce qui donne $k = 27$; l'équation devient

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(27\frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Un exemple numérique donne enfin $n = 1$, et l'on a l'équation

$$S^3(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 = 27T^2(r^2-r+1)^3.$$

Si l'on pose $r + \frac{1}{r} = \rho$, cela donne

$$S^3(\rho+2)\left(\rho-\frac{5}{2}\right)^2 = 27T^2(\rho-1)^3;$$

c'est cette dernière équation que Painvin obtient, sous forme développée ; il la met ensuite sous la forme précédente, en écrivant seulement par inadvertance $\rho + 1$, au lieu de $\rho - 1$.

[P¹5bβ]

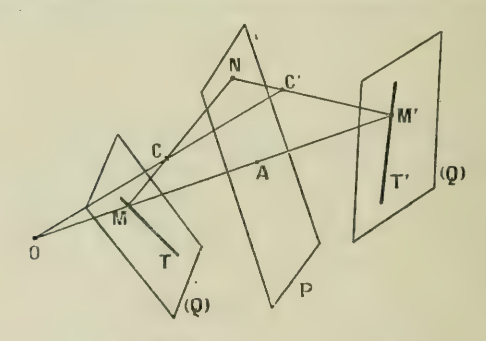
L'INVERSION CONSERVE LES LIGNES DE COURBURE;

Par M. Th. LECONTE.

Voici une démonstration très élémentaire de cette propriété.

Soit S et S′ deux surfaces inverses; O le centre d'inversion; M et M′ deux points inverses.

On sait que les normales MN, M′N en M et M′ aux surfaces S et S′ sont symétriques par rapport au plan P



perpendiculaire à MM′ en son milieu A. Il en est de même des plans tangents Q et Q′.

Appelons tangentes correspondantes, deux droites MT, M′T′ des plans Q et Q′, qui sont dans le même plan. Il est bien clair que les tangentes en M et M′ à deux courbes inverses C et C′ tracées sur les surfaces S et S′ sont des tangentes correspondantes.

Les cercles osculateurs Γ et Γ′ aux courbes C et C′ en M et M′ sont inverses l'un de l'autre. On sait, en effet, que le cercle osculateur en un point d'une courbe est

le cercle commun aux sphères osculatrices à la courbe en ce point et cette propriété se conserve par inversion.

Faisons varier la courbe C sur la surface S en laissant fixe la tangente MT. Le lieu du cercle Γ est une sphère Σ d'après le théorème de Meusnier et aussi, si la courbe C n'est pas plane, d'après cette remarque qu'elle peut être remplacée par la section plane de la surface S par son plan osculateur en M.

Pour les mêmes raisons, le lieu du cercle Γ′ est aussi une sphère Σ′ et les deux sphères Σ et Σ′ sont inverses l'une de l'autre.

Mais les sphères Σ et Σ′ ont pour centres les points C et C′ centres de courbure des sections normales des surfaces S et S′ par les plans NMT et NM′T′. Les points C et C′ sont donc alignés avec le point O.

Je dis maintenant que si MT est une tangente principale pour la surface S, M′T′ est aussi une tangente principale pour la suface S′. Faisons varier la tangente MT et par suite M′T′ et montrons que MC et M′C′ passeront en même temps par un maximum ou un minimum. Appliquons le théorème des transversales au triangle MM′N coupé par la sécante OCC′; nous aurons la relation

$$\frac{OM}{OM'} \cdot \frac{CN}{CM} \cdot \frac{C'M'}{C'N} = +1,$$

qui s'écrit encore

$$\frac{C'N}{C'M'} = \frac{OM}{OM'} \cdot \frac{CM}{CN},$$

et qui, jointe aux égalités

$$\frac{CN}{CM} = \frac{MN}{CM} - 1, \qquad \frac{C'N}{C'M'} = \frac{M'N}{C'M'} - 1,$$

montre que les tangentes principales se correspondent.

Soit une ligne de courbure L de la surface S. En chaque point M de cette ligne, la tangente MT est principale. Donc, sur la surface S′, en chaque point M′ de la ligne L′ inverse de L, la tangente M′T′ est aussi principale.

Cette démonstration montre l'intérêt qu'il y a à énoncer ainsi le théorème de Meusnier : « Le lieu des cercles osculateurs en un point M des courbes d'une surface S qui admettent une tangente donnée MT est une sphère. » Pour terminer, signalons que ce théorème, pris sous cette forme, devient immédiat si on le transforme par inversion par rapport au point M : au lieu des cercle osculateurs considérés, correspond relativement à la surface S′ inverse de S le lieu des droites asymptotes pour la direction asymptotique MT, et ce dernier lieu est le plan asymptote.

[P'2a]

SUR LES COURBES INVARIANTES PAR UNE TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES;

Par M. Paul SUCHAR,
Professeur au Lycée de Pau.

1. M. Lattès, dans un intéressant article sur le même sujet, paru dans ce Recueil, juillet 1906, donne la solution de ce problème en ramenant la recherche de ces courbes à la résolution de certaines équations fonctionnelles. Ce même problème, comme nous l'avons indiqué dans notre article du mois d'octobre 1912, a été résolu à un autre point de vue par M. Appell [*Sur les courbes autopolaires* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1894)].

Je me propose, dans cette nouvelle Note, de déterminer, par des considérations élémentaires, toutes les courbes invariantes par polaires réciproques et passant par un point double de la transformation, c'est-à-dire tangentes à la conique directrice.

2. Soit

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \tag{1}$$

le cercle directeur : si nous désignons par (r, θ), (r_1, θ_1), les coordonnées polaires d'un point M de la courbe cherchée et du point M_1, qui est le pôle correspondant à la tangente à la courbe au point M, enfin par p et p_1, les distances du centre du cercle directeur, qui est l'origine des axes, aux tangentes à la courbe aux points M et M_1 ; les formules de transformation sont

$$rr_1 \sin V = rp_1 = r_1 p = \lambda^2, \tag{2}$$

où V est l'angle de la tangente au point M ou M_1 avec les rayons vecteurs r et r_1. On peut se proposer de chercher la courbe qui est à elle-même sa polaire réciproque et passant par un point double sous la forme

$$f(r, p) = 0, \tag{3}$$

où f est une fonction inconnue, définissant une quelconque de ces variables en fonction de l'autre. Cette dernière équation, d'après (2), devient

$$f\left(r, \frac{\lambda^2}{r_1}\right) = 0, \tag{4}$$

et le problème se ramène à la recherche de la relation qui lie les rayons vecteurs correspondants r et r_1, issus du centre du cercle directeur, par la condition que sa courbe correspondante soit à elle-même sa polaire réciproque et soit tangente en un point de la

courbe directrice. On remarque que, si la courbe définie par (3) est invariante par polaire réciproque et tangente à la courbe directrice, la relation (4) doit être nécessairement symétrique par rapport à r et r_1, et pour $r = r_1$, cette équation doit admettre une racine égale à λ. Ces conditions *nécessaires* sont *suffisantes*. En effet, soient

$$\varphi(r, r_1) = 0 \tag{5}$$

une relation symétrique entre r et r_1, admettant pour $r = r_1$ une racine égale à λ, et

$$r_1 = \psi(r) \tag{6}$$

la fonction, définissant r_1 en fonction de r. On a, comme il est bien connu,

$$\tang V = r\frac{d\theta}{dr},$$

et d'après (2)

$$r_1^2 = \lambda^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right];$$

d'où, en ayant égard à (6),

$$\theta = \int_\lambda^r \frac{d\frac{1}{r}}{\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}\psi^2(r) - \frac{1}{r^2}}}, \tag{7}$$

où nous avons pris pour axe polaire la droite qui passe par le point double. Cette équation est celle de la courbe cherchée. En effet, on sait que l'angle V se conserve par transformation par polaires réciproques; on a donc

$$\tang V = r_1\frac{d\theta_1}{dr_1},$$

et par analogie

$$r^2 = \lambda^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\theta_1}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\right],$$

et comme la fonction (5) est symétrique, la polaire réciproque, correspondant à la courbe donnée par l'équation (7), sera donnée par l'équation

$$\theta_1 = \int_{\lambda}^{r_1} \frac{d\frac{1}{r_1}}{\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda^4}\psi^2(r_1) - \frac{1}{r_1^2}}},$$

qui ne diffère que par le changement de r et θ en r_1 et θ_1.

3. La méthode précédente nous conduit à des courbes invariantes et l'on aura la solution complète du problème si l'on détermine toutes les fonctions symétriques de r et r_1, et qui admettent pour $r = r_1$ la solution $r = \lambda$. Si $\omega(t)$ est une fonction donnée de la variable t, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\omega[\omega(t)] = t,$$

et $t = t_0$ une solution de l'équation

$$\omega(t) - t = 0,$$

on aura toutes les fonctions symétriques de r et r_1, en posant

$$(8) \qquad r = F[t, \omega(t)], \qquad r_1 = F[\omega(t), t],$$

où F est une fonction arbitraire, qui n'est pas symétrique par rapport à $\omega(t)$ et t, définie dans le domaine de $t = t_0$, et se réduisant à λ pour $t = t_0$. On remarque que, si l'on change t en $\omega(t)$, r prend la valeur r_1; par conséquent, la fonction obtenue, en éliminant t entre les deux dernières équations, est une fonction symé-

trique de r et r_1, admettant pour $r = r_1$ la solution $r = \lambda$. Les équations générales d'une courbe invariante sont donc

$$r = F[t, \omega(t)],$$

$$\theta = \lambda^2 \int_{t_0}^{t} \frac{F[t, \omega(t)]\, d\,\frac{1}{F[t, \omega(t)]}}{\pm\sqrt{F^2[t, \omega(t)]\, F^2[\omega(t), t] - \lambda^4}}.$$

Dans le cas particulier où la fonction F est symétrique par rapport à t et $\omega(t)$, on aura la fonction particulière

$$r - r_1 = \omega,$$

à laquelle correspond d'après (7), pour courbe invariante, l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = \lambda^2.$$

Dans les applications, la fonction $\omega(t)$ étant donnée, il suffit de prendre, pour $\omega(t)$, des fonctions élémentaires simples, exemple :

$$\omega(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{ou} \qquad \omega(t) = -t;$$

dans ce dernier cas, comme la fonction F n'est pas symétrique en général par rapport à $\omega(t)$ et à t, les relations (8) sont de la forme

$$r = F(t) - \Phi(t), \qquad r_1 = F(t) + \Phi(t),$$

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires, l'une paire, l'autre impaire, définies dans le domaine du point $t = 0$, et la première prenant la valeur λ pour $t = 0$.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Solution par M. le Comte de SPARRE.

Une boule pesante rencontre le sol supposé horizontal. On demande d'étudier son mouvement ultérieur à partir du moment où la boule touche le sol.

I. *On supposera la boule sphérique et homogène. On négligera la résistance de l'air et les frottements de roulement et de pivotement. On admettra l'hypothèse de Newton d'après laquelle la composante verticale de la vitesse du point μ de la boule qui vient en contact avec le sol se trouve multipliée immédiatement après la rencontre avec le sol par un facteur négatif $-e$ qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact avec $0 < e < 1$.*

II. *La discussion devra mettre surtout en évidence s'il y a glissement ou non glissement dans le contact. Elle montrera que la forme de la trajectoire du centre C de la boule dépend essentiellement (pour des substances données) de l'angle θ_1 de la verticale descendante avec la vitesse initiale du point μ fixe sur la boule, qui vient en contact avec le sol.*

III. *On appellera m la masse de la boule, ρ son*

rayon, f le coefficient de frottement de la boule contre le sol. On prendra comme origine des axes fixes la position initiale O du centre C de la boule quand elle arrive au sol et comme axe Oz une verticale ascendante. On appellera $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1, q_1, r_1$ les projections de la vitesse de C et de la vitesse angulaire de rotation instantanée de la boule au moment où elle touche le sol; $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, p'_1, q'_1, r'_1$ les valeurs de ces projections après la rencontre; v_1 et v'_1 les valeurs initiale et finale au moment de la rencontre avec le sol de la composante horizontale de la vitesse du point μ

$$\left(\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{v_1}{-\gamma_1}\right).$$

Comme application de la discussion, on pourra indiquer, en supposant $e = \frac{1}{2}$, $f = \frac{2}{7}$ les formes de la trajectoire de C, pour

$$\operatorname{tang}\theta_1 = 1, \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{5}{2} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = 4.$$

On pourra aussi examiner le cas où

$$\beta_1 = p_1 = 0, \qquad \operatorname{tang}\theta_1 < \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \left(v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1\right)$$

nul ou très petit.

Nous prendrons l'axe Ox parallèle à la composante horizontale de la vitesse du point μ et dans le sens de cette vitesse, à l'instant où ce point rencontre le sol, de sorte que nous aurons

$$\beta_1 + p_1\rho = 0, \qquad \alpha_1 - q_1\rho > 0.$$

La force de frottement qui s'exerce en μ au moment du choc sera donc parallèle à Ox et de sens contraire.

Désignons par P et Q les composantes de la percussion qui s'exerce en μ au moment du choc, Q sera parallèle à Ox et de sens contraire, P parallèle à Oz.

Écrivons alors qu'il y a équilibre entre les quantités de mouvement initiales, les forces de percussion et les quantités de mouvement finales prises en signes contraires, et prenons les moments par rapport au point μ; nous aurons

$$m(\alpha_1 - \alpha'_1) + Q = 0, \quad m(\beta_1 - \beta'_1) = 0, \quad m(\gamma_1 - \gamma'_1) + P = 0,$$

$$\frac{2}{5} m\rho^2 p_1 - m\beta_1\rho = \frac{2}{5} m\rho^2 p'_1 - m\beta'_1\rho,$$

$$\frac{2}{5} m\rho^2 q_1 + m\alpha_1\rho = \frac{2}{5} m\rho^2 q'_1 + m\alpha'_1\rho,$$

$$\frac{2}{5} m\rho^2 r_1 = \frac{2}{5} m\rho^2 r'_1.$$

On déduit d'abord de ces équations

$$\beta'_1 = \beta_1, \quad p'_1 = p_1, \quad r'_1 = r_1.$$

On a d'ailleurs par hypothèse

$$\gamma'_1 = -e\gamma_1$$

et l'on conclut alors des équations précédentes

$$P = -m\gamma_1(1+e), \tag{1}$$

$$\alpha'_1 - \alpha_1 = \frac{Q}{m}, \tag{2}$$

$$q'_1 = q_1 + \frac{5}{2}\frac{\alpha_1 - \alpha'_1}{\rho} = q_1 - \frac{5}{2}\frac{Q}{m\rho}. \tag{3}$$

On a d'ailleurs, avec les hypothèses faites,

$$v_1 = \alpha_1 - q_1\rho > 0, \quad Q < 0.$$

Après le choc on a, en vertu des équations précédentes,

$$\beta'_1 - p'_1\rho = \beta_1 - p_1\rho = 0.$$

de sorte que la vitesse du point μ après le choc, si elle n'est pas nulle, est parallèle à Ox, comme avant, on a d'ailleurs pour cette vitesse

$$v'_1 = \alpha'_1 - q'_1\rho = \alpha_1 - q_1\rho - \frac{7}{2}\frac{Q}{m} = v_1 - \frac{7}{2}\frac{Q}{m}.$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

1° Il y a glissement au moment du choc.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut $v'_1 > 0$ et l'on aura alors, Q étant négatif,

$$-Q = Pf = -m(1+e)f\gamma_1.$$

On aura alors en vertu des équations (2) et (3)

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - (1+e)\gamma_1 f,$$

$$q'_1 = q_1 - \frac{5}{2}\frac{1+e}{\rho}\gamma_1 f,$$

$$v'_1 = v_1 - \frac{7}{2}(1+e)\gamma_1 f$$

et toujours

$$p'_1 = p_1, \qquad \beta'_1 = \beta_1, \qquad r'_1 = r_1.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit, pour qu'il y ait glissement, il faut $v'_1 > 0$, ce qui donne

$$v_1 - \frac{7}{2}(1+e)\gamma_1 f > 0;$$

mais en posant

$$\tang\theta_1 = \frac{v_1}{-\gamma_1},$$

cette condition devient

$$\tang\theta_1 > \frac{7}{2}f(1+e).$$

Après le choc, la boule rebondit avec une vitesse $-\gamma_1 e$ et, puisque l'on néglige la résistance de l'air, son centre décrit un arc de parabole situé dans un plan vertical, les composantes horizontales de la

vitesse ainsi que celles de la rotation restant sans changements jusqu'au choc suivant. La boule rencontrera de nouveau le sol au bout d'un temps égal à $-\frac{2\gamma_1 e}{g}$ et la composante verticale de la vitesse du point C sera à cet instant $\gamma_1 e$. De plus, comme la vitesse de la projection horizontale est constante pendant ce premier bond, ce point aura parcouru, parallèlement à Ox, une distance

$$-\frac{2\gamma_1 e}{g}\alpha'_1 = -\frac{2\gamma_1 e}{g}[\alpha_1 - \gamma_1(1+e)f],$$

et parallèlement à Oy une distance

$$-\frac{2\gamma_1 e}{g}\beta'_1 = -\frac{2\gamma_1 e}{g}\beta_1.$$

Ce que nous venons de dire pour le premier bond s'applique en réalité pour un bond quelconque *tant qu'il y aura glissement*. Désignons alors par α_n, β_n, γ_n, p_n, q_n, r_n les projections de la vitesse de C et de la vitesse de rotation instantanée de la boule au moment où il touche le sol et par α'_n, β'_n, γ'_n, p'_n, q'_n, r'_n les valeurs de ces projections après la rencontre, au début du $n^{\text{ième}}$ bond et supposons qu'il y ait encore glissement pendant cette $n^{\text{ième}}$ rencontre, nous aurons alors, en vertu de ce qui précède,

$$\gamma'_n = -e\gamma_n, \qquad \gamma_{n+1} = -\gamma'_n = e\gamma_n,$$

$$\alpha'_n = \alpha_{n+1} = \alpha_n - (1+e)f\gamma_n,$$

$$\beta'_n = \beta_n = \beta_1,$$

$$p'_n = p_n = p_1,$$

$$r'_n = r_n = r_1,$$

$$q'_n = q_n - \frac{5}{2}\frac{1+e}{\rho}f\gamma_n,$$

$$v'_n = v_n + \frac{7}{2}(1+e)f\gamma_n.$$

Désignons de plus par x_n et y_n les coordonnées de C au début du $n^{\text{ième}}$ bond, nous aurons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2e\gamma_n}{g}\alpha'_n,$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{2e\gamma_n}{g}\beta_1.$$

D'ailleurs si t_n est la durée du $n^{\text{ième}}$ bond, on a

$$t_n = -\frac{2e\gamma_n}{g}.$$

On déduit des formules précédentes, d'abord

$$\gamma_n = e^{n-1}\gamma_1, \qquad t_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g};$$

puis successivement

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f,$$
$$\alpha'_2 = \alpha'_1 + (1+e)e\gamma_1 f,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha'_n = \alpha'_{n-1} + (1+e)e^{n-1}\gamma_1 f,$$

d'où en ajoutant

$$\alpha'_n = \alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f(1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1})$$

ou

$$(4) \qquad \alpha'_n = \alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^n}{1-e} = \alpha_{n+1}.$$

On aura d'une façon semblable

$$(5) \qquad q'_n = q_1 - \frac{5}{2}\frac{(1+e)\gamma_1 f}{\rho}\frac{1-e^n}{1-e} = q_{n+1},$$

$$(6) \qquad r'_n = r_1 + \frac{5}{2}(1+e)f\gamma_1\frac{1-e^n}{1-e} = r_{n+1}.$$

Nous aurons ensuite

$$x_2 - x_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}\alpha'_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f]$$

$$= -\frac{2e\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e}{1-e}\right],$$

$$x_3 - x_2 = -\frac{2e\gamma_2}{g}\alpha'_2 = -\frac{2e^2\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^2}{1-e}\right],$$

. . . . ,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^n}{1-e}\right],$$

d'où l'on déduit en ajoutant

$$x_{n+1} - x_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)(1+e+e^2+\ldots+e^{n-1})$$

$$+\frac{2e^2\gamma_1^2}{g}\frac{1+e}{1-e}f(1+e^2+e^4+\ldots+e^{2n-2})$$

$$= -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)\frac{1-e^n}{1-e}$$

$$+\frac{2e^2\gamma_1^2}{g}f\frac{1+e}{1-e}\frac{1-e^{2n}}{1-e^2},$$

ou enfin, en remarquant que l'on suppose $x_1 = y_1 = 0$,

$$(7)\qquad x_{n+1} = -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)\frac{1-e^n}{1-e}$$

$$+\frac{2e^2\gamma_1^3}{g}f\frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2}.$$

De même

$$y_2 - y_1 = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g},$$

$$y_3 - y_2 = -\frac{2e^2\gamma_1\beta_1}{g},$$

. . . .

$$y_{n+1} - y_n = -\frac{2e^n\gamma_1\beta_1}{g};$$

d'où, puisque $y_1 = 0$,

$$(8)\qquad y_{n+1} = -\frac{2e\gamma_1}{g}\beta_1\frac{1-e^n}{1-e},$$

et, enfin en posant,

$$T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

on aura

$$(9) \qquad T_n = -\frac{2e\gamma_1}{g}\,\frac{1-e^n}{1-e}.$$

Ces formules ne doivent toutefois être appliquées que tant qu'on a

$$v_n = v_1 + \frac{7}{2}(1+e)\gamma_1 f\,\frac{1-e^n}{1-e} > 0,$$

ou, sous une autre forme,

$$(10) \qquad \operatorname{tang}\theta_1 > \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}\,f(1-e^n).$$

On tire de l'équation (8)

$$\frac{1-e^n}{1-e} = -\frac{g y_{n+1}}{2e\gamma_1\beta_1},$$

puis

$$\frac{1-2e^n+e^{2n}}{(1-e)^2} = 2\,\frac{1-e^n}{(1-e)^2} - \frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2} = \frac{g^2 y_{n+1}^2}{4e^2\gamma_1^2\beta_1^2},$$

d'où

$$\frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2} = -\frac{g y_{n+1}}{e(1-e)\gamma_1\beta_1} - \frac{g^2 y_{n+1}^2}{4e^2\gamma_1^2\beta_1^2}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on aura, toutes réductions faites,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1+\gamma_1 f}{\beta_1}\,y_{n+1} - \frac{g f y_{n+1}^2}{2\beta_1^2}.$$

On voit que les projections sur le plan des x, y des points de contact successifs, tant qu'il y a glissement, se trouvent sur la parabole

$$(11) \qquad x = \frac{\alpha_1+\gamma_1 f}{\beta_1}\,y - \frac{g f}{2\beta_1^2}\,y^2.$$

La projection horizontale de C décrit des cordes

successives de cette parabole, chaque corde correspondant à un bond.

On peut remarquer que l'équation de cette parabole ne dépend pas de e.

Comme nous l'avons dit, les formules précédentes ne doivent être appliquées que tant que l'inégalité (10) est satisfaite.

On est, par suite, conduit à partager le cas actuel en deux, suivant que l'inégalité (10) est ou n'est pas satisfaite pour n infini.

I.

La relation (10) est satisfaite pour n infini, c'est-à-dire qu'on a, puisque $e < 1$,

$$(12) \qquad \operatorname{tang} \theta_1 > \frac{7}{2} \frac{1-e}{1+e} f.$$

Dans ce cas, la boule fait un nombre infini de bonds, pendant la période de glissement, et v_n n'étant pas nul pour n infini, il y aura encore glissement lorsque la vitesse verticale sera devenue nulle. D'ailleurs les valeurs de α'_n, β'_n, x_n, y_n et T_n sont finies pour n infini; on aura, en vertu des formules établies plus haut,

$$\alpha'_\infty = \alpha_1 - \frac{1+e}{1-e} \gamma_1 f, \qquad \beta'_\infty = \beta_1,$$

$$p_\infty = p_1, \qquad q_\infty = q_1 - \frac{5}{2} \frac{1+e}{1-e} \frac{\gamma_1 f}{\rho},$$

$$x_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right) + \frac{2e^2\gamma_1^2}{g(1-e)^2} f$$

$$= -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e}\right),$$

$$y_\infty = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)}, \qquad T_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}, \qquad \gamma'_\infty = 0.$$

A partir de ce moment, le mouvement du point C se fait dans le plan horizontal et est, comme on sait, parabolique tant que le glissement persiste; on a d'ailleurs, à partir de cet instant et tant qu'il y a glissement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = gf, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Comme, de plus, on a pour les valeurs initiales en posant

$$t' = t - T_\infty,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha'_\infty = \alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \beta_1,$$

$$x_0 = x_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e}\right),$$

$$y_0 = y_\infty = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)},$$

nous aurons

$$x = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e}\right) + \left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)t' - \frac{gft'^2}{2}, \tag{13}$$

$$y = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)} + \beta_1 t'. \tag{14}$$

En éliminant t' entre ces deux équations, on aura alors, toutes réductions faites,

$$x = \frac{\alpha_1 + \gamma_1 f}{\beta_1} y - \frac{gf}{2\beta_1^2} y^2.$$

C'est l'équation de la parabole (11), lieu des positions du point C à la fin de chacun des bonds. On voit que, lorsque la vitesse verticale est annulée, le point de contact de la boule et du plan se produit, tant que le glissement persiste, sur la parabole, lieu des points de contacts, lors des bonds précédents.

On a d'ailleurs, pendant cette période, au moyen

du théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à des axes parallèles aux axes fixes passant par C,

$$\frac{2}{5} m\rho^2 \frac{dq}{dt} = mgf\rho, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0;$$

d'où l'on déduit, puisque $q_0 = q_\infty$,

$$(15) \qquad \begin{aligned} q &= q_0 + \frac{5}{2}\frac{gf}{\rho}t' = q_1 + \frac{5}{2}\frac{1+e}{1-e}\frac{\gamma_1 f}{\rho} + \frac{5}{2}\frac{gf}{\rho}t', \\ p &= p_0 = p_1, \\ r &= r_0 = r_1. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, pour la vitesse v'_x du point de contact,

$$\begin{aligned} v'_x = \frac{dx}{dt} + q\rho = \alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - gft' - q_1\rho \\ - \frac{5}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - \frac{5}{2}gft'; \end{aligned}$$

mais comme, à l'instant initial,

$$v_1 = \alpha_1 - q_1\rho,$$

on a, en définitive,

$$v'_x = v_1 - \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - \frac{7}{2}gft'.$$

Cette vitesse devient nulle pour une valeur τ de t' fournie par l'équation

$$\tau = \frac{v_1 + \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f}{\frac{7}{2}gf} = \gamma_1 \frac{\operatorname{tang}\theta_1 - \frac{7}{2}\frac{1-e}{1-e}f}{\frac{7}{2}gf},$$

valeur qui est positive en vertu de la relation (12).

On a d'ailleurs

$$t = T_\infty + \tau.$$

A partir de cet instant, il y aura roulement sans

glissement et le centre de la boule aura un mouvement rectiligne et uniforme.

II.

Supposons maintenant que l'inégalité (12) ne soit pas satisfaite, bien que, au début, il y ait glissement, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{7}{2}(1-e)f < \tang\theta_1 < \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}\,f, \tag{16}$$

il y aura alors une valeur de n pour laquelle on aura

$$\frac{7}{2}\,\frac{1-e}{1+e}\,f(1-e^{n-1}) < \tang\theta_1 \leqq \frac{7}{2}\,\frac{1-e}{1+e}\,f(1-e^{n}); \tag{17}$$

alors la vitesse v'_n du point de contact μ deviendra nulle au début du $n^{\text{ième}}$ bond, pour la valeur T_{n-1} du temps donné par la formule (9), les valeurs correspondantes de x_n et y_n se déduisant des formules (7) et (8).

2° Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'il y a roulement sans glissement.

Si le phénomène se produit au début du $n^{\text{ième}}$ bond [1], la valeur de n vérifie la relation (17) si n est plus grand que 1; si au lieu de cela le roulement sans glissement se produit dès le début [2], on a

$$\tang\theta_1 \leqq \frac{7}{2}(1-e)f.$$

On a, en tout cas, pour cette valeur de n

$$v'_n = x'_n - a q'_n = 0. \tag{18}$$

---

[1] Qui pourrait être le premier.

[2] Auquel cas $n = 1$.

On a d'ailleurs toujours [1]

$$m(\alpha_n - \alpha'_n) + Q = 0, \qquad \beta_n = \beta'_n, \qquad p_n = p'_n, \qquad r_n = r'_n,$$
$$m(\gamma_n - \gamma'_n) + P = 0,$$
$$\frac{2}{5} m \rho^2 q_n + m \alpha_n \rho = \frac{2}{5} m \rho^2 q'_n + m \alpha'_n \rho.$$

On déduit de ces équations jointes à l'équation (18)

$$\alpha'_n = \rho q'_n = \frac{5}{7} \alpha_n + \frac{2}{7} \rho q_n, \tag{19}$$

$$-Q = \frac{2}{7} m(\alpha_n - \rho q_n) = \frac{2}{7} m v_n, \tag{20}$$

$$P = -m(1+e)\gamma_n = -m(1+e)e^{n-1}\gamma_1, \tag{21}$$

car on a toujours

$$\gamma_n = e^{n-1}\gamma_1. \tag{22}$$

On a d'ailleurs, ainsi que cela doit être, dans le cas actuel

$$-Q \leqq Pf$$

ou

$$\frac{2}{7} m v_n \leqq -m \gamma_n (1+e) f.$$

En effet, en vertu de la formule (6) et de l'inégalité (17),

$$v_n + \frac{7}{2}(1+e)\gamma_n f$$
$$= v_1 + \frac{7}{2}(1+e) f \gamma_1 \frac{1-e^{n-1}}{1-e} + \frac{7}{2}(1+e)e^{n-1}\gamma_1 f$$
$$= v_1 + \frac{7}{2}(1+e) f \gamma_1 \frac{1-e^n}{1-e} \leqq 0.$$

On a de plus dans le cas actuel, en vertu des équa-

---

[1] Les équations du mouvement du centre de gravité et celles des mouvements par rapport aux axes parallèles aux axes fixes passant par μ subsistant sans changement.

tions (19), (4) et (5),

$$\alpha'_n = \frac{5}{7}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f \frac{1-e^{n-1}}{1-e}\right] + \frac{2}{7}\left[\rho q_1 - \frac{5}{2}(1+e)\gamma_1 f \frac{1-e^{n-1}}{1-e}\right]$$

ou

$$(23)\qquad \alpha'_n = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1.$$

On voit que la vitesse du point C, au moment où le roulement sans glissement se produit, dépend seulement de la vitesse initiale et est indépendante du glissement qui a pu se produire avant.

Dans le cas actuel, du roulement sans glissement, le mouvement de la projection horizontale de C est rectiligne et uniforme avec une vitesse qui a pour composante α'_n parallèlement à Ox, et β_1 parallèlement à Oy. Dans l'espace, le point C décrit, dans le plan vertical qui projette ce point et dont nous venons de parler, une série d'arcs de parabole, correspondant à chacun des bonds successifs.

Pour l'arc qui correspond au $n^{\text{ième}}$ bond, on a

$$(24)\qquad x_{n+1} - x_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\left(\frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1\right),$$

$$(25)\qquad y_{n+1} - y_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\beta_1.$$

et la flèche correspondante est

$$(26)\qquad z_n = \frac{\gamma_1^2 e^{2n}}{2g}.$$

La valeur de T est d'ailleurs toujours donnée par la formule (9)

$$T_n = -\frac{2e\gamma_1}{g}\frac{1-e^n}{1-e}$$

et les bonds cesseront pour n infini, donc pour la valeur

$$T_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)},$$

instant à partir duquel il y aura roulement sans glissement.

Considérons un point H situé à une distance égale à $\frac{2}{5}\rho$ au-dessus de C[1], les composantes de la vitesse horizontale de ce point seront :

1° Tant qu'il y a glissement et que la composante verticale de la vitesse n'est pas nulle,

$$\alpha'_n + \frac{2}{5}\rho q'_n \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (4) et (5),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1.$$

Ces composantes sont donc constantes.

2° Lorsque la composante verticale de la vitesse est nulle, les composantes horizontales de la vitesse de H sont

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{5}\rho q \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (13) et (15),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1.$$

Ces composantes sont donc encore constantes et égales à ce qu'elles sont dans le premier cas.

---

[1] C'est le centre d'oscillation pour un axe de suspension tangent à la sphère en μ.

3° Enfin lorsqu'il y a roulement sans glissement, au moment du choc, ces composantes sont

$$\alpha'_n + \frac{2}{5}\rho q'_n = \frac{7}{5}\alpha'_n \qquad \text{et} \qquad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (23),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{7}{5}\beta_1,$$

valeurs encore égales à celles obtenues dans les cas précédents.

On voit donc que les composantes horizontales de la vitesse du point de la boule qui se trouve en H sont constantes comme grandeur et direction pendant toute la suite du phénomène. D'ailleurs, au moment où le roulement sans glissement se produit, la vitesse finale du point C est parallèle à celle du point H et égale aux $\frac{5}{7}$ de cette vitesse; ces composantes de la vitesse finale de C sont donc

$$\frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1.$$

C'est le résultat auquel nous étions déjà arrivé.

Reste à examiner les cas particuliers où

$$e = \frac{1}{2}, \qquad f = \frac{2}{7},$$

d'où

$$\frac{7}{2}(1+e)f = \frac{3}{2},$$

donc :

1° Si $\tang\theta_1 = 1$, on a

$$\tang\theta_1 < \frac{7}{2}f(1+e),$$

et il y a roulement sans glissement dès le début du

mouvement, et, en projection horizontale, le mouvement de C est rectiligne et uniforme, le point C décrivant dans chaque bond un arc de parabole conformément aux formules (24), (25) et (26).

2° Si $\tang\theta_1 = \frac{5}{2}$, comme $\frac{7}{2}f(1+e) = \frac{2}{3}$, on a

$$\tang\theta_1 > \frac{7}{2}f(1+e).$$

Il y a donc roulement sans glissement pendant les premiers bonds.

Toutefois,

$$\frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f = 3,$$

de sorte que

$$\tang\theta_1 < \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f.$$

Le roulement sans glissement se produira donc au bout d'un nombre fini de bonds pour la valeur de n pour laquelle on aura [formule (17)]

$$3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < \tang\theta_1 \leqq 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right],$$

relation qui, puisque $\tang\theta_1 = \frac{5}{2}$, sera satisfaite pour $n = 3$, car on a

$$\frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{21}{8}.$$

La boule exécutera donc deux bonds pendant lesquels il y aura glissement et le roulement sans glissement se produira au début du troisième bond, les deux premiers points de contact se projetant horizontalement sur la parabole (11).

3° Si $\tang\theta_1 = 4$, comme $\frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f = 3$, on a

$$\tang\theta_1 > \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f.$$

Il y aura glissement pendant tous les bonds et ces bonds, en nombre infini, seront suivis d'une période de glissement pendant laquelle le point C décrit, d'après ce que nous avons vu, un arc de parabole (11) qui est le prolongement de celui de la même parabole sur lequel se trouvait le point C pendant chacun des chocs précédents.

4° Si $v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = 0$ avec $\beta_1 = p_1 = 0$,

$$\operatorname{tang}\theta_1 < \frac{3}{2}.$$

La dernière condition fait d'abord voir qu'il y aura roulement sans glissement pendant les chocs dès le début. La vitesse de C est parallèle à Ox, puisque $\beta_1 = p_1 = 0$, et l'on a pour sa valeur

$$\alpha'_1 = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1,$$

d'ailleurs par hypothèse

$$v_1 = \frac{7}{2}\alpha_1 = \alpha_1 - \rho q_1,$$

d'où

$$\rho q_1 = -\frac{5}{2}\alpha_1;$$

donc $\alpha'_1 = 0$ et aussi, puisqu'il y a roulement sans glissement,

$$q'_1 = \frac{\alpha'_1}{\rho} = 0.$$

Donc, dans ce cas, la boule est animée après le choc du seul mouvement de translation vertical dont la vitesse est

$$\gamma'_1 = -e\gamma_1.$$

Elle exécutera donc, sur place, un nombre infini de

bonds verticaux dont la hauteur ira toujours en diminuant, celle du $n^{\text{ième}}$ bond étant d'après la formule (26)

$$\frac{\gamma_1^2 c^{2n}}{2g} = \frac{\gamma_1^2}{g}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

La boule reviendra définitivement au repos au bout du temps

$$-\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)} = -\frac{2\gamma_1}{g}.$$

Si $v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = \varepsilon$, ε étant très petit, les autres conditions restant les mêmes, on aura

$$v_1 = \frac{7}{2}\alpha_1 + \varepsilon = \alpha_1 - \rho q_1,$$

d'où

$$\rho q_1 = -\frac{5}{2}\alpha_1 - \varepsilon$$

et

$$\alpha'_1 = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1 = -\frac{2}{7}\varepsilon,$$
$$q'_1 = \frac{\alpha'}{\rho} = -\frac{2}{7}\frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Donc, dans ce cas, le point C sera animé d'une très faible vitesse horizontale et la boule d'un mouvement de rotation dont la composante horizontale sera très lente.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCES EN 1912.

Composition de Mathématiques. (Sciences. — I.)

PREMIÈRE COMPOSITION.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz, *les axes* Ox *et* Oy *étant rectangulaires.*

On donne trois circonférences réelles (C_1), (C_2), (C_3) *rencontrant l'axe* Oz *et situées dans des plans distincts, parallèles au plan* xOy; *on désigne par* O_1, O_2, O_3 *les centres de ces circonférences et par* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ *leurs coordonnées.*

1° *Former l'équation des quadriques passant par deux des courbes* (C_1), (C_2), (C_3).

Toute conique rencontrant chacune des courbes (C_1), (C_2) *en deux points à distance finie est située avec* (C_1) *et* (C_2) *sur une même quadrique.*

A quelles conditions doivent satisfaire les données pour que (C_1), (C_2), (C_3) *soient situées sur une même quadrique?*

On supposera dans la suite que ces conditions ne sont pas vérifiées.

2° *Déterminer les plans* P *coupant chacune des trois courbes* (C_1), (C_2), (C_3), *en deux points à distance finie, les six points obtenus étant situés sur une même conique, soit* (Σ).

Montrer que les plans P *sont parallèles à une direction fixe.*

Lorsqu'on assujettit les plans P *à passer par un point donné* R, *la conique* (Σ) *engendre une surface cubique* (S).

Pour quels points R *la surface* (S) *est-elle décomposée, c'est-à-dire formée d'un plan et d'une quadrique?*

Comment se coupent deux surfaces (S)?

3° *Toute surface cubique passant par* (C_1), (C_2), (C_3) *peut-elle être obtenue d'après la génération précédente?*

On formera l'équation de la surface et l'on cher-

chera à l'écrire à l'aide de surfaces cubiques décomposées vérifiant les conditions imposées.

4° *On choisit les circonférences* (C_1) *et* (C_2) *de rayon nul* (O_1 *et* O_2 *étant alors sur* Oz), *les plans de ces circonférences étant symétriques par rapport au plan* xOy, *et le centre de la circonférence* (C_3) *dans le plan* xOz.

On désigne par (S_1) *la surface* (S) *correspondant à ces données et passant par les axes* Oz *et* Oy.

Les sections de la surface (S_1) *par les plans parallèles à* xOy *et par les plans passant par* Oz *comprennent des circonférences* (C) *et des hyperboles* (H).

Indiquer la forme de la surface (S_1) *en traçant ces sections.*

5° *Exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface* (S_1) *à l'aide de deux paramètres fixant la position des plans des courbes* (C) *et* (H) *passant par ce point.*

Les tangentes aux courbes de l'une des familles (C) *ou* (H) *aux points de rencontre avec une courbe arbitrairement choisie dans l'autre famille engendrent une surface réglée. De quelle nature sont les surfaces réglées ainsi obtenues?*

Comment sont constitués les cônes circonscrits à la surface (S_1) *et dont les sommets sont situés sur* Oz? *les cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles au plan* xOy?

Composition de Mathématiques.
(Sciences. — I.)

DEUXIÈME COMPOSITION.

Un point matériel M, *de masse égale à un gramme, est attiré par un point fixe* O *avec une force mesurée*

en unités **C.G.S.** ***par*** $\frac{1}{r^3}$, *r désignant la distance* OM. (*Force inverse du cube* ***de la distance.***)

1° *Discuter la forme de la trajectoire* T ***du*** *point* M, *d'après la position et la vitesse de ce point en un instant particulier* t_0, *et caractériser sur cette courbe les deux arcs correspondant respectivement aux instants postérieurs et aux instants antérieurs à* t_0.

2° *Calculer les coordonnées de* M *en fonction du temps. Indiquer les circonstances essentielles du mouvement.*

3° *La valeur arithmétique de la vitesse à l'instant* t_0 *étant donnée, et supposée égale à* v_0, *déterminer le domaine où doit se trouver* M *à ce même instant pour que* M *décrive une spirale, quelle que soit la direction initiale du mouvement.* M *n'appartenant pas à ce domaine à l'instant* t_0, *dans quel angle doit être dirigée la vitesse* v_0 *pour que l'arc suivi par* M *appartienne à une spirale?*

4° *Déterminer, quand elles existent, les asymptotes de* T. *Pour une des branches* τ *de* T, *et son asymptote* A, *calculer l'aire comprise entre* τ, A *et deux rayons vecteurs issus de* O.

5° *Étant donnés deux points* M_0 *et* M, *déterminer les valeurs de* v_0 *telles que le mobile partant de* M_0 *avec une vitesse initiale égale à* v_0 *et perpendiculaire au rayon vecteur* OM_0 *passe en* M *dans le cours ultérieur de son mouvement.*

Composition de Mathématiques.
(Sciences. — II.)

I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + (1-\alpha^2)y - e^x + \sin^2 x,$$

dans laquelle α désigne une constante réelle donnée. Discuter suivant les valeurs de α.

II. *Une courbe plane* (C) *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *la normale au point* M *à la courbe* (C) *rencontre* Ox *en* N *et la parallèle à* Oy *menée par* N *rencontre au point* T *la tangente en* M *à la courbe* (C) :

1° *Déterminer la courbe* (C) *de manière que la longueur* NT *soit égale à une longueur donnée* $2a$;

2° *Soit* (C_0) *celle des courbes* C *qui passe par* O; *désignons par* O′ *celui des points de rencontre de cette courbe* (C_0) *avec* Ox *qui est le plus rapproché du point* O. *Démontrer que l'aire* S, *comprise entre l'arc* OM *de la courbe* (C_0) *et les segments rectilignes* MN *et* NO, *est proportionnelle à l'abscisse du pied* M *de la normale; calculer l'aire* S_0 *comprise entre l'arc* OO′ *et la corde* OO′;

3° *Déterminer la position du point* M *de manière que*

$$S = \frac{1}{4} S_0$$

et calculer ses coordonnées avec deux décimales exactes en supposant, pour ce calcul, $a = 1$.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Établir les équations de mouvement d'un fil flexible.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un losange articulé* ABCD *est posé sur un plan horizontal lisse. Un des sommets* A *est fixe.*

On demande d'étudier son mouvement lorsque les vitesses initiales de rotation des tiges AB *et* AC *sont* ω *et* ω', *et que la forme initiale est un carré.*

ω *étant double de* ω', *on calculera le maximum de l'angle des deux tiges* AB, AC, *pendant le mouvement.*

Les quatre tiges du losange sont homogènes et identiques. (Novembre 1910.)

Grenoble.

Composition. — *Une plaque carrée, homogène, infiniment mince, et pesante, est assujettie aux liaisons suivantes sans frottement : un de ses sommets* O *est fixe, un de ses côtés* OH *est horizontal. A l'instant initial la plaque est horizontale et immobile :*

1° *Mouvement de la plaque;*

2° *Au moment où la plaque est verticale, on immobilise brusquement le côté* OH. *Cette liaison étant persistante, trouver le mouvement ultérieur; calculer la perte de force vive.*

Épreuve pratique. — *Une circonférence homogène pesante* C, *de rayon* R, *reste dans un plan vertical* P. *Elle roule sans glisser sur une circonférence* Γ *de rayon* ρ ($\rho < R$) *située dans ce plan et fixe par rapport à lui.* Γ *est intérieur à* C. *On néglige le frottement de roulement :*

1° *Le plan* P *étant fixe, trouver le mouvement de* C *et la réaction exercée par* Γ *sur* C;

2° *Comment faut-il choisir les données initiales pour que le mouvement considéré se produise si l'on suppose que* C *peut quitter* Γ *et que l'absence de glissement est due au frottement de glissement (appeler* f *le coefficient de frottement);*

3° *En supposant que* P *tourne uniformément autour de* Oz *verticale du centre* O *de* Γ, *trouver les positions d'équilibre relatif de* C.

Nota. — *Prendre pour paramètre l'angle* θ *que fait avec* Oz *le rayon* OI *aboutissant au point de contact.*

(Juin 1911.)

COMPOSITION. — *Deux sommets opposés* P *et* R *d'une plaque carrée homogène* PQRS *glissent sans frottement sur une circonférence horizontale fixe dont le rayon est égal au côté de la plaque :*

Étudier le mouvement de la plaque ; discuter.

Peut-il arriver que le mouvement soit une rotation uniforme, soit autour de l'axe du cercle, soit autour de la diagonale PR?

(*On admet que les liaisons sont réalisées de telle façon que la plaque puisse traverser le plan de la circonférence.*)

Paramètres : ψ *angle de* PR *et d'un rayon fixe* Ox, *de la circonférence ;* θ *angle du plan de la plaque et du plan du cercle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parallélépipède homogène de masse* M *a pour arêtes* a, b, c :

1° *Trouver l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'un de ses sommets* O ;

2° *Le parallélépipède étant animé d'une rotation uniforme de vitesse* ω *autour de l'une de ses arêtes* OO' *verticale, fixe et de longueur* C, *la fixité de l'arête étant réalisée par la fixité de ses extrémités* O, O', *déterminer les réactions qui s'exercent en* O *et* O' ;

3° *Déterminer, par rapport à* O, *le moment résultant des quantités de mouvement de ce solide ;*

4° *Application numérique :*

$$a = 0^{m},5; \qquad b = 0^{m},4; \qquad c = 1^{m};$$

poids du solide 100^{kg} ; *la vitesse de rotation* ω *correspond à* 30 *tours par minute.* (Novembre 1911.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir l'équation différentielle qui définit la trajectoire d'un point matériel de masse unité sous l'action d'une force centrale fonction de la position du mobile. L'intégrer dans le cas où la force estimée suivant le sens du rayon vecteur a pour valeur* $\frac{\mu r}{x^3}$,

r étant le rayon vecteur et x l'abscisse suivant le rayon vecteur initial OM_0 ; μ *est un coefficient constant: initialement* $OM_0 = a$ *et le mobile est animé, normalement à* OM_0, *d'une vitesse égale à* $\sqrt{\frac{\mu}{2a}}$.

II. *Le potentiel cinétique d'un système dynamique conservatif holonome ne dépend pas explicitement de certaines des coordonnées de position de ce système. Montrer comment les intégrales premières correspondant à ces coordonnées peuvent être utilisées pour ramener l'étude du mouvement du système à celle du mouvement d'un autre système analogue dont le potentiel cinétique ne dépend que des autres coordonnées.*

Appliquer le procédé de réduction au mouvement d'un cerceau circulaire mobile autour d'un diamètre vertical et d'un petit anneau pesant susceptible de glisser sans frottement sur le cerceau.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Par une pression du doigt sur un rond de serviette (dont la masse peut être regardée comme concentrée à la périphérie) reposant sur une table horizontale par sa surface cylindrique, on lance ce rond sur la table dans une direction perpendiculaire à son axe, en même temps qu'on lui imprime une vitesse de rotation autour de cet axe. Le rond se porte en avant pendant* 2^s, *puis rétrograde pour repasser à son point de départ après un nouvel intervalle de* $2^s,5$, *et il continue ensuite à rouler uniformément sur la table. Déterminer l'instant auquel ce mouvement uniforme a commencé.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donné un système dynamique conservatif holonome à n degrés de liberté, montrer comment on peut utiliser l'intégrale de l'énergie pour ramener l'étude du mouvement d'un système à celle du mouvement d'un autre système dynamique à* $(n-1)$ *degrés de liberté.*

Appliquer ce mode de réduction à l'étude du mouvement à deux paramètres q_1, q_2, *dont le potentiel cinétique est*

$$\frac{a^2 q_1'^2}{q_1} - (q_1 + b) q_2'^2.$$

a et b étant des constantes; déterminer l'équation finie des trajectoires.

II. *Un tube circulaire parfaitement poli, de rayon r, mobile autour d'un diamètre placé verticalement, reçoit un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire* $\omega = \sqrt{\frac{3g}{r}}$. *Au point le plus bas est placé, en équilibre relatif, un point matériel qu'on vient à déranger légèrement de sa position. Étudier le mouvement ultérieur du point, et calculer notamment la longueur du pendule simple qui aurait la même durée d'oscillation.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer la force que produit l'attraction newtonienne d'un solide homogène de révolution, admettant pour méridienne la courbe d'équation polaire*

$$\rho = a\sqrt{\cos\theta},$$

par rapport à l'axe de révolution pris pour axe polaire, sur un point matériel situé au pôle.

2° *Même question pour la sphère définie par l'équation*

$$\rho = b\cos\theta.$$

3° *Le point matériel étant le même dans les deux cas, déterminer le rapport des densités des deux corps, de manière que les masses et les forces attractives des deux corps soient respectivement égales; calculer alors le rapport des volumes.* (Novembre 1911.)

Lyon.

Une plaque circulaire infiniment mince, homogène, pesante, est suspendue par son centre de gravité G *à l'extrémité* B *d'un fil de longueur l, flexible, inextensible et sans masse, dont l'autre extrémité* A *est fixe. Chaque molécule* M *de cette plaque est en outre attirée proportionnellement à sa masse et à sa distance* OM *vers un point fixe quelconque* O. *Étudier le mouvement du système.*

Pour le centre de gravité, après avoir établi complètement les équations différentielles dans l'hypothèse la plus générale, on pourra ne poursuivre l'étude du mouvement que dans l'hypothèse où le centre attractif O *est sur la verticale du point* A. *Pour le mouvement relatif, on cherchera par la méthode la plus simple à en donner une idée précise. On verra, en particulier, s'il n'existe pas une direction fixe telle que, dans le mouvement le plus général, la variation de l'angle de la plaque avec cette direction soit particulièrement simple, et l'on dira comment on peut déterminer cette direction à l'aide des conditions initiales, quelles que soient ces conditions.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La trajectoire d'un mobile est plane et a pour équation, en coordonnées rectangulaires,* $x^2y = a^3$. *L'accélération est constamment dirigée vers l'origine des coordonnées :*

1° *Trouver la loi du mouvement, connaissant, pour* $t = 0$, *les valeurs initiales* x_0 *et* x'_0 *de* x *et de* $\frac{dx}{dt}$;

2° *Quelle doit être la valeur de la constante des aires pour que la trajectoire soit superposable à l'hodographe;*

3° *Trouver l'équation de la podaire de la trajectoire relative à l'origine, et montrer que la trajectoire et sa podaire sont des courbes inverses. Calculer la puissance d'inversion, et expliquer le résultat;*

4° *Trouver le lieu des points du plan de la trajectoire tels que le moment du vecteur accélération par rapport à ces points soit indépendant du temps.*

(Juin 1911.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XII, 4e SÉRIE.)

La classification adoptée est celle de l'Index
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XII, 4e SÉRIE.)

48789 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



